1 KINEMATIKA LETA

1.1 Matrični zapis vektora

1.1.1 Baza koordinatnog sustava

Svaki Deckartov koordinatni sustav određen je s tri jedinična vektora njegovih koordinatnih osi:

$$\vec{b}_x \quad \vec{b}_y \quad \vec{b}_z \tag{1.1}$$

koje zovemo baza koordinatnog sustava. U slučaju desnog koordinatnog sustava (uvijek ćemo se služiti desnim koordinatnim sustavom), prva dva vektora pomnožena vektorski daju treći (drugi pomnožen s trećim daje prvi, a treći s prvim daje drugi). Bilo koji vektor $\vec{V}$ bit će u tom koordinatnom sustavu određen jednadžbom:

$$\vec{V} = V_x \vec{b}_x + V_y \vec{b}_y + V_z \vec{b}_z \tag{1.2}$$

u kojoj su $V_x \quad V_y \quad V_z$ projekcije vektora $\vec{V}$ na osi koordinatnog sustava A. Uvodimo oznaku za matricu od jednog stupca koju čine tri komponente jednog vektora:

$$\mathbf{V}^A = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}^T \tag{1.3}$$

i matricu od jednog stupca koju čine tri jedinična vektora nekog koordinatnog sustava

$$\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_x & \vec{b}_y & \vec{b}_z \end{bmatrix}^T \tag{1.4}$$

Tu matricu od tri jedinična vektora nekog koordinatnog sustava zovemo baza toga koordinatnog sustava. Matrice označavamo *masnim* slovima. Indeks gore označava u kojemu su koordinatnom sustavu zadane komponente vektora i izostavljamo ga ako se podrazumijeva u kojem su koordinatnom sustavu dane komponente. S ovim oznakama bit će:

$$\vec{V} = \left(\vec{\mathbf{b}}\right)^T \mathbf{V}^A = \left(\mathbf{V}^A\right)^T \vec{\mathbf{b}} \tag{1.5}$$

ili

$$\mathbf{V}^{A} = \vec{\mathbf{b}}\,\vec{V} \tag{1.6}$$

1.1.2 Vektorski i skalarni produkt vektora

Poznate su nam komponente **C** i **D** dvaju vektora u koordinatnom sustavu čija je baza $\vec{\mathbf{b}}$

$$\vec{\mathrm{C}} = \vec{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$$
$$\vec{\mathrm{D}} = \vec{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}$$

Želimo matrično izračunati komponente u istom koordinatnom sustavu od skalarnog i vektorskog produkta:

$$\mathrm{S} = \vec{\mathrm{C}} \cdot \vec{\mathrm{D}}$$
$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{C}} \times \vec{\mathrm{D}}$$

Skalarni produkt lako nalazimo prema definiciji:

$$\mathrm{S} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\,,$$

jer je $\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}$ jedinična matrica.

Da bi smo odredili komponente vektorskog produkta, pomnožimo skalarno jednadžbu vektorskog produkta

$$\vec{\mathbf{b}}^{T}\mathbf{A} = \vec{C} \times \left(\vec{\mathbf{b}}^{T}\mathbf{D}\right)$$

s bazom $\vec{\mathbf{b}}$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \vec{\mathbf{b}} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{\mathbf{b}}^{T}\,\mathbf{D}\right)\\ &= \vec{\mathbf{b}} \cdot \left[\vec{C} \times \vec{b}_x \quad \vec{C} \times \vec{b}_y \quad \vec{C} \times \vec{b}_z\right]\mathbf{D}\end{aligned}$$

Kako je:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}}\mathrm{C}_{\mathrm{x}} + \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}}\mathrm{C}_{\mathrm{y}} + \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}}\mathrm{C}_{\mathrm{z}}\right) \times \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}} &= -\mathrm{C}_{\mathrm{y}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}} + \mathrm{C}_{\mathrm{z}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}}\\ \left(\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}}\mathrm{C}_{\mathrm{x}} + \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}}\mathrm{C}_{\mathrm{y}} + \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}}\mathrm{C}_{\mathrm{z}}\right) \times \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}} &= \mathrm{C}_{\mathrm{x}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}} - \mathrm{C}_{\mathrm{z}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}}\\ \left(\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}}\mathrm{C}_{\mathrm{x}} + \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}}\mathrm{C}_{\mathrm{y}} + \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}}\mathrm{C}_{\mathrm{z}}\right) \times \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}} &= -\mathrm{C}_{\mathrm{x}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}} + \mathrm{C}_{\mathrm{y}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}}\end{aligned}$$

bit će:

$$\vec{\mathbf{b}} \cdot \left(\vec{\mathrm{C}} \times \vec{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\right) = \begin{bmatrix}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}}\\ \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}}\\ \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}}\end{bmatrix} \cdot \left[-\mathrm{C}_{\mathrm{y}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}} + \mathrm{C}_{\mathrm{z}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}} \quad \mathrm{C}_{\mathrm{x}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{z}} - \mathrm{C}_{\mathrm{z}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}} \quad -\mathrm{C}_{\mathrm{x}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{y}} + \mathrm{C}_{\mathrm{y}}\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{x}}\right] \tag{1.7}$$

ili

$$\vec{\mathbf{b}} \cdot \left(\vec{\mathrm{C}} \times \vec{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{C}_z & \mathrm{C}_y \\ \mathrm{C}_z & 0 & -\mathrm{C}_x \\ -\mathrm{C}_y & \mathrm{C}_x & 0 \end{bmatrix} \qquad 1.8$$

Ovu antisimetričnu matricu koja ima nule na glavnoj dijagonali, sastavljenu od komponenti vektora nazivamo kososimetrična matrica. Obično je obilježavamo sa $\widetilde{\mathbf{C}}$. Tako konačno dobivamo matricu **A** od komponenti vektorskog produkta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{C}_z & \mathrm{C}_y \\ \mathrm{C}_z & 0 & -\mathrm{C}_x \\ -\mathrm{C}_y & \mathrm{C}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_x \\ \mathrm{D}_y \\ \mathrm{D}_z \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{D} \qquad 1.9$$

Zapamtit ćemo da vektorski produkt dvaju vektora, čije su komponente poznate, ima komponente koje se dobivaju matričnim množenjem kososimetrične matrice prvoga vektora s matricom od jednog stupca drugog vektora.

1.1.3 Derivacija vektora

U dinamici leta vrlo se često susrećemo s problemom koji možemo formulirati ovako: u nekom koordinatnom sustavu B, koji rotira poznatom kutnom brzinom $\vec{\Omega}$ (poznate komponente p, q i r duž osi toga koordinatnog sustava), poznate su nam komponente duž osi toga koordinatnog sustava od vektora $\vec{V}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \qquad 1.10$$

koje su funkcije vremena, a nama su potrebne komponente (duž osi toga istog koordinatnog sustava B) derivacije po vremenu vektora $\vec{V}$. Obilježimo tu derivaciju sa $\vec{a}$.

Ako je $\vec{\mathbf{b}}$ baza promatranog koordinatnog sustava, onda je

$$\vec{V} = \vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{V} .$$

Po definiciji, tražena derivacija je

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{b}}^T \mathbf{V} \right) = \frac{d\vec{\mathbf{b}}^T}{dt} \mathbf{V} + \vec{\mathbf{b}}^T \frac{d\mathbf{V}}{dt} .$$

Komponente bilo kojeg vektora, tj. matricu komponenata, dobivamo kad dani vektor pomnožimo skalarno ispred s bazom koordinatnog sustava:

$$\mathbf{a} = \vec{\mathbf{b}}\,\dot{\vec{\mathbf{b}}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{V} + \dot{\mathbf{V}} \qquad 1.11$$

Napomenimo najprije da izvod po vremenu komponenata koje obilježavamo sa $\dot{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \end{bmatrix}^T$ nije isto što i komponente izvoda koje obilježavamo sa **a**. Kao što vidimo, razlika je član $\vec{\mathbf{b}}\dot{\vec{\mathbf{b}}}^T\mathbf{V}$. Razvijmo produkt $\vec{\mathbf{b}}\dot{\vec{\mathbf{b}}}^T$.

Kako je derivacija po vremenu bilo kojeg jediničnog vektora jednaka vektorskom produktu kutne brzine toga jediničnog vektora te samog jediničnog vektora, a sva tri jedinična vektora imaju istu kutnu brzinu koja je jednaka kutnoj brzini koordinatnog sustava B, bit će:

$$\vec{\mathbf{b}}\dot{\vec{\mathbf{b}}}^T = \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{b}}^T, \tag{1.12}$$

a prema definiciji kososimetrične matrice, na desnoj strani je upravo kososimetrična matrica kutne brzine koordinatnog sustava B, tj.

$$\vec{\mathbf{b}}\dot{\vec{\mathbf{b}}} = \widetilde{\mathbf{\Omega}}\,. \tag{1.13}$$

Kako vidimo, dobiveni rezultat je koso simetrična matrica komponenti trenutne kutne brzine $\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$ koordinatinog sustava B, te je

$$\mathbf{a} = \widetilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{V} + \dot{\mathbf{V}}\,. \tag{1.14}$$

Prema tomu, zapamtimo, ako vektor $\vec{V}$ ima komponente u v w poznate u koordinatnom sustavu B čija je kutna brzina $\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$, onda derivacija po vremenu vektora $\vec{V}$ ima komponente (u koordinatnom sustavu B)

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Moguće je $\dot{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \end{bmatrix}^T$ nazvati relativna derivacija vektora $\vec{V}$, jer ona ne uzima u obzir rotaciju koordinatnih osi, dok apsolutna derivacija jest zbroj relativne derivacije i člana zbog rotacije koordinatnih osi. U jednadžbi apsolutna derivacija nalazi se na lijevoj strani, a na desnoj strani prvi član je posljedica rotacije koordinatnog sustava B, a drugi član predstavlja relativnu derivaciju.

1.2 Matrice transformacija

Kad izračunavamo složene probleme mehanike leta kao što je let zrakoplova, tada primjenjujemo znanja iz više oblasti. Na primjer, aerodinamičke sile određujemo prema teoriji i praksi aerodinamike, pogonske sile prema konstrukciji motora, a sila Zemljine teže određena je u geofizici. Tako se susrećemo s problemom da je jedna sila poznata u jednom koordinatnom sustavu, druga u drugomu, treća u trećemu, a mi želimo kretanje tijela u četvrtome koordinatnom sustavu. Ovaj problem nameće potrebu za nekim jednostavnim načinom prijelaza iz jednoga koordinativnog sustava u drugi, što znači ne zadržavati se na problemu određivanja komponenti vektora u nekom koordinatnom sustavu ako su one poznate u drugome. Za rješenje tog problema služit ćemo se matricama transformacija, jer je matrični račun pogodan za rad na računalu.

1.2.1 Definicija i svojstva matrice transformacije

Ako imamo neki drugi desni koordinatni sustav čija je matrica jediničnih vektora $\vec{\mathbf{b}}$ (baza koordinatnog sustava B), onda je taj isti vektor $\vec{V}$ u tom drugom koordinatnom sustavu:

$$\vec{V} = \left(\vec{\mathbf{b}}\right)^T \mathbf{V}^B$$

te mora biti:

$$\left(\vec{\mathbf{a}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\mathrm{A}} = \left(\vec{\mathbf{b}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\mathrm{B}}$$

Množenjem ove matrice ispred s matricom $\vec{\mathbf{b}}$ dobivamo:

$$\mathbf{V}^B = \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}^T\ \mathbf{V}^A$$

Produkt matrica $\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}$ nazivamo *matricom transformacije u koordinatni sustav* **B** *iz koordinatnog sustava* **A**, te je označavamo sa $\mathbf{L}_{BA}$, tj. bit će:

$$\mathbf{L}_{BA} = \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}^T = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_x\vec{a}_x & \vec{b}_x\vec{a}_y & \vec{b}_x\vec{a}_z \\ \vec{b}_y\vec{a}_x & \vec{b}_y\vec{a}_y & \vec{b}_{yz}\vec{a}_z \\ \vec{b}_z\vec{a}_x & \vec{b}_z\vec{a}_y & \vec{b}_z\vec{a}_z \end{bmatrix} \qquad 1.16$$

ili

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} a_x^b & a_y^b & a_z^b \end{bmatrix}. \qquad 1.17$$

Korisno je znati zapis ove matrice u računalu npr. u FORTRANU ona ima oblik

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} L(1,1) & L(2,1) & L(3,1) \\ L(1,2) & L(2,2) & L(3,2) \\ L(1,3) & L(2,3) & L(3,3) \end{bmatrix} \qquad 1.18$$

Matrica transformacije ima dimenzije 3x3 (kvadratna trećega reda). Njen član ℓ_{ij} predstavlja kosinus kuta između osi "i koordinatnog sustava B" i osi "j koordinatnog sustava A".

Prvo svojstvo matrice transformacije dobivamo polazeći od jednakosti:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{B}} = \mathbf{L}_{\mathrm{BA}} \mathbf{V}^{\mathrm{A}}$$

Množenjem inverznom matricom ispred dobivamo:

$$\mathbf{L}_{\mathrm{BA}}^{-1} \mathbf{V}^{\mathrm{B}} = \mathbf{V}^{\mathrm{A}}$$

te je prvo svojstvo matrice transformacije

$$\mathbf{L}_{\mathrm{AB}} = \mathbf{L}_{\mathrm{BA}}^{-1} . \qquad 1.19$$

Drugo svojstvo matrice transformacije dobivamo iz jednakosti intenziteta vektora

$$\left(\mathbf{V}^{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\mathrm{B}} = \left(\mathbf{V}^{\mathrm{A}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\mathrm{A}}$$

iz koje slijedi:

$$\left(\mathbf{V}^{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_{\mathrm{BA}} \mathbf{V}^{\mathrm{A}} = \left(\mathbf{V}^{\mathrm{A}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\mathrm{A}}$$

$$\left(\mathbf{V}^{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_{\mathrm{BA}} = \left(\mathbf{V}^{\mathrm{A}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{L}_{\mathrm{BA}}^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{\mathrm{B}} = \mathbf{V}^{\mathrm{A}}$$

$$\mathbf{L}_{\mathrm{BA}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{L}_{\mathrm{AB}} . \qquad 1.20$$

To je vrlo važno svojstvo matrice transformacije jer je mnogo lakše transponirati matricu negoli odrediti njenu inverznu matricu. Iz ove jednadžbe slijedi i zaključak da je determinanta matrice transformacije jednaka jedinici:

$$\left|\mathbf{L}_{\mathrm{BA}}\right| = 1 . \qquad 1.21$$

Zbroj kvadrata članova jednog stupca ili jednog retka bit će zbroj kvadrata kosinusa kutova koje čini jedna od osi s osima drugoga koordinatnog sustava, te taj zbroj mora biti jednak jedinici.

Ako kososimetričnu matricu treba množiti s matricom transformacije ispred $\mathbf{L}_{\mathrm{PE}}$, onda će se ona transformirati, tj. sve će komponente iz jednog koordinatnog sustava prijeći u komponente drugoga sustava, a matrica transformacije bit će iza novo oblikovane kososimetrične matrice

$$\mathbf{L}_{PE}\,\widetilde{\mathbf{C}}^{E} = \widetilde{\mathbf{C}}^{P}\,\mathbf{L}_{PE}\,. \tag{1.22}$$

Da bismo dokazali ovo svojstvo, pretpostavimo dva različita koordinatna sustava "E" i "P". Vektorsko množenje možemo obaviti u oba koordinatna sustava:

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{E}\mathbf{B}^{E} = \mathbf{C}^{E}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{P}\mathbf{B}^{P} = \mathbf{C}^{P}\,.$$

Kako je

$$\mathbf{L}_{PE}\mathbf{C}^{E} = \mathbf{C}^{P}\,,$$

mora biti

$$\mathbf{L}_{PE}\widetilde{\mathbf{A}}^{E}\mathbf{B}^{E} = \widetilde{\mathbf{A}}^{P}\mathbf{B}^{P}$$

odakle dobivamo:

$$\mathbf{L}_{PE}\widetilde{\mathbf{A}}^{E} = \widetilde{\mathbf{A}}^{P}\mathbf{L}_{PE}\,. \tag{1.23}$$

Ova jednadžba pokazuje kako množenjem ispred, kososimetrične matrice sastavljene od komponenata vektora u koordinatni sustav "E" s matricom transformacije, dobivamo kososimetričnu matricu istog vektora, ali sastavljenu od komponenata u koordinatnom sustavu "P" pomnoženu iza s istom matricom transformacije, što ima za posljedicu transformaciju vektorskog produkta u matričnom obliku:

$$\mathbf{L}_{PE}\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{E}\mathbf{B}^{E}\right) = \mathbf{L}_{PE}\widetilde{\mathbf{A}}^{E}\mathbf{B}^{E} = \widetilde{\mathbf{A}}^{P}\mathbf{L}_{PE}\mathbf{B}^{E} = \widetilde{\mathbf{A}}^{P}\mathbf{B}^{P}\,. \tag{1.24}$$

1.2.2 Derivacija matrice transformacije

Neka je vektor $\vec{r}$ konstantan u prostoru u kojemu se nalazi koordinatni sustav A koji miruje. Matrica $\mathbf{r}^{A}$ (koju čine komponente toga vektora u koordinativnom sustavu A) bit će konstantna matrica. Koordinatni sustav B ima kutnu brzinu $\vec{\Omega}_{B/A}$ (u odnosu na koordinatni sustav A), te zato su komponente konstantnog vektora u koordinatnom sustavu B promjenljive veličine, a to znači da su članovi matrice $\mathbf{r}^{B}$ funkcije vremena. U svakom trenutku postoji matrica transformacija $\mathbf{L}_{BA}$ koja je također funkcija vremena, takva da je

$$\mathbf{r}^{B} = \mathbf{L}_{BA}\mathbf{r}^{A} \tag{1.25}$$

te je

$$\dot{\mathbf{r}}^{B} = \dot{\mathbf{L}}_{BA}\mathbf{r}^{A}, \qquad 1.26$$

jer su članovi matrice $\mathbf{r}^{A}$ konstante. Sa $\dot{\mathbf{r}}^{B}$ označili smo matricu koju čine derivacije komponenti vektora $\vec{r}$ u koordinatnom sustavu B. Komponente derivacije bilo kojeg vektora u koordinatnom sustavu B koji rotira kutnom brzinom $\vec{\Omega}_{B/A}$ bit će u koordinatnom sustavu B

$$\widetilde{\Omega}\,\mathbf{r}^{B} + \dot{\mathbf{r}}^{B}.$$

Međutim, kako je vektor $\vec{r}$ konstantan, njegova derivacija je nulti vektor, te je

$$\dot{\mathbf{r}}^{B} = -\widetilde{\Omega}\,\mathbf{r}^{B}.$$

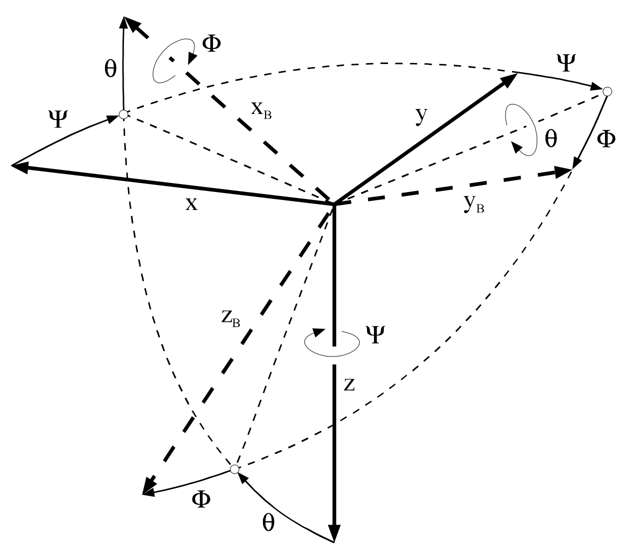
Zamijenimo li u ovoj jednadžbi $\dot{\mathbf{r}}^{B}$ sa $\dot{\mathbf{L}}_{BA}\mathbf{r}^{A}$ i $\mathbf{r}^{B}$ sa $\mathbf{L}_{BA}\mathbf{r}^{A}$, dobivamo traženi izvod matrice transformacije

$$\dot{\mathbf{L}}_{BA} = -\widetilde{\Omega}_{B/A}\mathbf{L}_{BA}. \qquad 1.27$$

1.2.3 Određivanje matrice transformacije pomoću kutova

Vrijednosti članova matrice transformacija $\mathbf{L}_{BA}$ ovise o položaju koordinatnog sustava B u odnosu na koordinatni sustav 1. U mehanici postoje tri načina za određivanje položaja jednog koordinatnog sustava u odnosu na drugi koordinatni sustav. To su: Eulerovi kutovi, de Sparreovi kutovi i Hamilton - Rodriguezovi parametri.

Eulerovi kutovi ne primjenjuju se u mehanici leta, već tzv. de Sparreovi kutovi, te ćemo se i mi koristiti njima. Zadani koordinatni sustav **B** zaokrenut je u odnosu na koordinatni sustav **A**: za kut ψ oko z osi , za kut ϑ oko novog položaja y osi i konačno za kut ϕ oko najnovijeg položaja x osi. Te kutove ϕ ϑ ψ nazivamo de Sparreovi kutovi (sl.1-1).



Slika 1-1 De Sparreovi kutovi

Matricu transformacije odredit ćemo postupno od ta tri kuta. Promatrat ćemo transformaciju $\mathbf{L}_{BA}$ (u B iz A) kao rezultat triju sukcesivnih transformacija:

1) za kut ψ oko treće osi $\mathbf{L}_z(\psi)$,

2) za kut ϑ oko druge osi $\mathbf{L}(\vartheta)$,

3) za kut ϕ oko treće osi $\mathbf{L}(\phi)$.

Svakoj od tih transformacija odgovara po jedna matrica transformacije. Rezultat svake sljedeće transformacije jest produkt matrice transformacije ispred vektora. Tako će poslije prve transformacije (rotacija za kut ψ oko treće osi) komponente vektora $\vec{V}$ biti

$$\mathbf{L}_z(\psi)\mathbf{V}^A, \tag{1.28}$$

poslije druge transformacije (rotacija za kut ϑ oko druge osi) bit će

$$\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi)\mathbf{V}^A \tag{1.29}$$

i poslije treće transformacije (rotacija za kut ϕ oko prve osi), bit će

$$\mathbf{L}_x(\phi)\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi)\mathbf{V}^A. \tag{1.30}$$

Prema tome vidimo da je matrica transformacija u koordinatni sustav B iz koordnatnog sustava A

$$\mathbf{L}_{BA} = \mathbf{L}_x(\phi)\mathbf{L}_y(\vartheta)\mathbf{L}_z(\psi). \tag{1.31}$$

Koristeći se definicijom matrice transformacija, dobivamo:

$$\mathbf{L}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

$$\mathbf{L}_y(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

$$\mathbf{L}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

Produkt svih triju matrica transformacije daje:

$$\mathbf{L}_{BA} = \begin{bmatrix} c\vartheta c\psi & c\vartheta s\psi & -s\vartheta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\vartheta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\vartheta s\psi & s\phi c\vartheta \\ s\phi s\psi + c\phi s\vartheta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\vartheta s\psi & c\phi c\vartheta \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

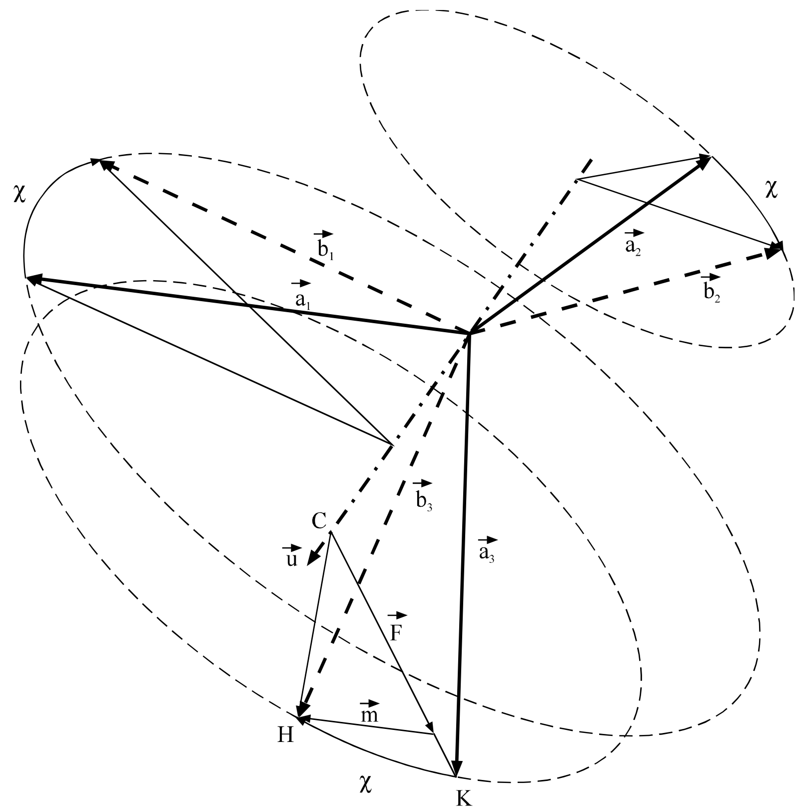
Radi kraćeg pisanja označili smo sa “s” sinusnu, a sa “c” kosinusnu funkciju. Općenito, možemo reći kako je matrica transformacija jedna matrična funkciju od tri parametra te je

$$\mathbf{L}_{BA} = \mathbf{L}_X(\varphi)\cdot\mathbf{L}_Y(\vartheta)\cdot\mathbf{L}_Z(\psi) = \mathbf{L}(\phi,\vartheta,\psi). \qquad 1.36$$

U korisničkoj biblioteci možemo napraviti potprogram u kojeme su ulazni parametri ta tri kuta (u radijanima) φ, ϑ i ψ, a izlaz je matrica transformacije $\mathbf{L}_{BA}$, dimenzija 3x3.

1.2.4 Određivanje matrice transformacije pomoću parametra

Proračun trigonometrijskih funkcija pomoću računala razmjerno je dugotrajan u usporedbi s proračunom osnovnih računskih operacija. To je razlog zašto se nastoji izbjeći proračun matrica transformacija na osnovi kutova φ, ϑ i ψ.



Slika 1-2. Hamilton-Rodriguezovi (Eulerovi) parametri

Prijelaz iz koordinatnog sustava A u koordinatni sustav B može se ostvariti zaokretom za jedan kut χ oko neke osi čiji je jedinični vektor $\vec{u}$. Matrica od jednog stupca sastavljena od komponenti toga jediničnog vektora u koordinatnom sustavu A poznata je i označit ćemo je sa “**u**”. Cijeli koordinatni sustav okrene se oko $\vec{u}$ za kut χ kao kruto tijelo te prijeđe iz položaja A u položaj B (slika 1-2). Pri tomu, svaka os koordinatnog sustava napravi isti kut rotacije χ oko $\vec{u}$. Hamilton - Rodriguezovi parametri (u literaturi iz SADa nazivaju se Eulerovi parametri) po definiciji su:

$$e_0 = \cos\frac{\chi}{2}$$
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}^T = \mathbf{u}sin\frac{\chi}{2}. \tag{1.37}$$

To znači da imamo četiri parametra od kojih prvi e_0 jest kosinus polukuta rotacije, a preostala tri su komponente vektora duž osi rotacije čiji je intenzitet sinus polukuta rotacije. Iz toga slijedi prvo svojstvo parametara:

$$\mathrm{e}_0^2 + \mathrm{e}_1^2 + \mathrm{e}_2^2 + \mathrm{e}_3^2 = 1. \tag{1.38}$$

Uvedemo li oznaku za matricu od jednog stupca

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}_0 & \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{1.39}$$

prvo je svojstvo parametara

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{p} = 1, \tag{1.40}$$

a deriviranjem te jednadžbe bit će i

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{p}} = 0. \tag{1.41}$$

Za daljnje izvođenje nužne su neke jednadžbe veza između tih parametara, koje lako dobivamo na osnovi gornjih definicija:

$$\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}} = \left(\mathrm{e}_0^2 - 1\right)\mathbf{I} + \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}$$
$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} + \mathrm{e}_0\dot{\mathrm{e}}_0\mathbf{I} \tag{1.42}$$
$$\tilde{\mathbf{e}}\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \dot{\mathbf{e}}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} + \mathrm{e}_0\dot{\mathrm{e}}_0\mathbf{I}$$

Promatrajmo jednu os određenu jediničnim vektorom $\vec{a}$ kada je koordinatni sustav u položaju A. Trebamo odrediti jedinični vektor te iste osi poslije rotacije χ oko $\vec{u}$. Obilježimo sa $\vec{b}$ taj novi položaj jediničnog vektora osi poslije rotacije kad je koordinatni sustav došao u položaj A. Znači jedinični vektor $\vec{a}$ poslije rotacije χ oko osi $\vec{u}$ postaje jedinični vektor $\vec{b}$ (slika 1-2). Vrh jediničnog vektora $\vec{a}$ opisao je jedan dio kružnice KH sa središtem u C na osi rotacije $\vec{u}$. U ravnini kružnice iz točke H spustimo okomicu na polumjer kružnice CK. Nazovimo tu okomicu vektor $\vec{n}$, a neka je vektor $\vec{r}$ udaljenost od središta kružnice do okomice. Intenzitet tog vektora $\vec{a}$ je $HC\sin\chi$, a smjer i pravac podudaraju se s vektorskim produktom $\vec{u}\times\vec{a}$. S obzirom na intenzitet toga vektorskog produkta, koji je jednak polumjeru CK ili CH, bit će u matričnom obliku:

$$\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{a}\,sin\chi$$
$$\mathbf{r} = \left[\mathbf{a} - \left(\mathbf{u}^T\mathbf{a}\right)\mathbf{u}\right]\cos\chi\,.$$

Sad smo u mogućnosti izraziti u matričnom obliku i jedinični vektor b:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \left(\mathbf{u}^T\mathbf{a}\right)\mathbf{u} + \mathbf{r} + \mathbf{n} \\ &= \left(\mathbf{u}^T\mathbf{a}\right)\mathbf{u} + \left[\mathbf{a} - \left(\mathbf{u}^T\mathbf{a}\right)\mathbf{u}\right]cos\chi + \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{a}\,sin\chi \\ &= \mathbf{a}\,cos\chi + \mathbf{u}\left(\mathbf{u}^T\mathbf{a}\right)\left(1 - cos\chi\right) + \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{a}\,sin\chi\,.\end{aligned}$$

S obzirom na vrijednosti Hamilton-Rodriguezovih parametara zamijenit ćemo trigonometrijske funkcije njihovim vrijednostima ovisno o polukutu $\chi/2$.

$$\cos\chi = 2\cos^2\frac{\chi}{2} - 1$$

$$1 - \cos\chi = 2\sin^2\frac{\chi}{2}$$

$$\sin\chi = 2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}\,.$$

Poslije tih zamjena dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \left(2cos^2\frac{\chi}{2} - 1\right)\mathbf{a} + \mathbf{u}\left(\mathbf{u}^T\mathbf{a}\right)2\sin^2\frac{\chi}{2} + \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{a}2sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2} \\ &= \left(2e_0^2 - 1\right)\mathbf{a} + 2\mathbf{e}\left(\mathbf{e}^T\mathbf{a}\right) + 2e_0\tilde{\mathbf{e}}\mathbf{a}\,.\end{aligned}$$

Razvijanjem matrica možemo pokazati da je

$$\mathbf{e}\left(\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\right) = \left(\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{a}\,,$$

te pomoću ove relacije imamo konačni izraz za zarotirani jedinični vektor osi-z:

$$\mathbf{b} = \left[2\mathrm{e}_0^2 - 1 + 2\left(\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} + \mathrm{e}_0\tilde{\mathbf{e}}\right)\right]\mathbf{a} \qquad 1.43$$

b je matrica komponenti (u koordinatnom sustavu A) jediničnog vektora osi koja je zarotirana u novi položaj B, a **a** je matrica komponenti te osi (u istom koordinatnom sustavu A) prije rotacije.

Prema definiciji matricu transformacije čine tri jedinična vektora osi koordinatnoga sustava iz kojega se polazi u odnosu na sustav u koji se dolazi, a to znači da je:

$$\mathbf{L}_{AB} = \left[\mathbf{b}_X^A \quad \mathbf{b}_Z^A \quad \mathbf{b}_Z^A\right] = \left[\left(2e_0^2 - 1\right) + 2\left(\mathbf{e}\mathbf{e}^T + e_0\tilde{\mathbf{e}}\right)\right]\left[\mathbf{a}_x \quad \mathbf{a}_y \quad \mathbf{a}_z\right]$$

$$\mathbf{L}_{AB} = \left(2e_0^2 - 1\right)\mathbf{I} + 2\left(\mathbf{e}\mathbf{e}^T + e_0\tilde{\mathbf{e}}\right), \qquad 1.44$$

ili

$$\mathbf{L}_{AB} = 2\begin{bmatrix} e_1^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_3 e_1 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_2^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_3 e_1 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_3^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \qquad 1.45$$

S obzirom na to što je $\mathbf{ee}^{\mathrm{T}}$ simetrična matrica, a $\tilde{\mathbf{e}}$ kososimetrična, bit će

$$\mathbf{L}_{\mathrm{BA}} = \left(2\mathrm{e}_0^2 - 1\right)\mathbf{I} + 2\left(\mathbf{ee}^{\mathrm{T}} - \mathrm{e}_0\tilde{\mathbf{e}}\right), \qquad 1.46$$

ili

$$\mathbf{L}_{\mathrm{BA}} = 2\begin{bmatrix} \mathrm{e}_1^2 + \mathrm{e}_0^2 - \frac{1}{2} & \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_0\mathrm{e}_3 & \mathrm{e}_3\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_0\mathrm{e}_2 \\ \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_0\mathrm{e}_3 & \mathrm{e}_2^2 + \mathrm{e}_0^2 - \frac{1}{2} & \mathrm{e}_2\mathrm{e}_3 + \mathrm{e}_0\mathrm{e}_1 \\ \mathrm{e}_3\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_0\mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_2\mathrm{e}_3 - \mathrm{e}_0\mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_3^2 + \mathrm{e}_0^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \qquad 1.47$$

Time smo odredili matricu transformacije ovisno o Hamilton - Rodriguezovim parametrima i, kao što vidimo, članovi matrice nisu trigonometrijske funkcije parametara, već polinomi drugoga reda koji se vrlo brzo računaju u procesoru računala.

1.2.5 Veze između parametara i kutova

Možemo lako naći vezu između Hamilton - Rodriguezovih parametara i de Sparreovih kutova. Razmotrimo prvo slučaj kad poznamo de Sparreove kutove, a želimo naći Hamilton - Rodriguezove parametre. Pomoću de Sparreovih kutova možemo izračunati matricu transformacije $\mathbf{L}_{AB}$. Kad su nam poznati članovi ℓ_{ij} te matrice transformacije

$$\mathbf{L}_{AB} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}. \qquad 1.48$$

Usporedbom dobivamo zbroj članova jednak dijagonali:

$$tr\mathbf{L}_{AB} = 2\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 3e_0^2 - \frac{3}{2}\right) = 4e_0^2 - 1 \qquad 1.49$$

te je:

$$e_0^2 = \frac{\left(tr\mathbf{L}_{AB} + 1\right)}{4}. \qquad 1.50$$

Predznak parametra e_0 time je neodređen. Pretpostavimo li da je predznak +, tada je e_0 određeno. Uspoređivanjem razlika članova simetričnih u odnosu na glavnu dijagonalu dobivamo

$$e_1 = \frac{\ell_{32} - \ell_{23}}{4e_0}, \quad e_2 = \frac{\ell_{13} - \ell_{31}}{4e_0}, \quad e_3 = \frac{\ell_{21} - \ell_{12}}{4e_0}. \qquad 1.51$$

Ako smo odabrali pogrešan predznak za e_0 vektor **e** promijenit će smjer te je transformacija ista jer koordinatni sustav transformiramo iz položaja A u položaj B na isti način (suprotna rotacija na obratnom smjeru osi rotacije isto je što i zadana rotacija oko zadanog smjera osi rotacije).

Drugi slučaj, kada znamo Hamilton-Rodriguezove parametre, a trebamo de Sparreove kutove, lakši je jer jednostavnom usporedbom matrica $\mathbf{L}_{AB}$, napisane pomoću de Sparreovih kutova i pomoću Hamilton-Rodriguezovih parametara, dobivamo:

$$\begin{aligned} tg\psi &= \frac{e_0 e_3 + e_1 e_2}{e_0^2 + e_1^2 - 1/2} \\ \sin\vartheta &= -2(e_1 e_3 - e_0 e_2) \\ tg\phi &= \frac{e_2 e_3 + e_0 e_1}{e_0^2 + e_3^2 - 1/2} \end{aligned} \qquad 1.52$$

1.2.6 Diferencijalne jednadžbe parametara

Poseban problem jest taj kako za vrijeme gibanja nekog objekta u svakom trenutku odrediti Hamilton-Rodriguez-ove parametre p. Budući da dinamičke jednadžbe određuju kutnu brzinu objekta u ovisno o vremenu, problem se svodi na kinematičku zadaću iznalaženja veze između te kutne brzine i derivacija po vremenu Hamilton-Rodriguez-ovih parametara. Da bi lakše riješili taj problem uvodimo dvije nove pomoćne matrice:

$$\mathbf{E} = \left[-\mathbf{e} \quad \mathrm{e}_0 \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{e}} \right] \qquad 1.53$$

$$\mathbf{G} = \left[-\mathbf{e} \quad \mathrm{e}_0 \mathbf{J} - \tilde{\mathbf{e}} \right]. \qquad 1.54$$

Te matrice imaju neka svojstva na kojima ćemo temeljiti nalaženje derivacija Hamilton-Rodriguezovih parametara.

Prva Lema

$$\mathbf{L}_{AB} = \mathbf{E}\mathbf{G}^T \qquad 1.55$$

Dokaz

$$\mathbf{E}\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & e_0\mathbf{J} + \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{e}^T \\ e_0\mathbf{J} + \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \mathbf{e}\mathbf{e}^T + e_0\mathbf{J} + 2e_0\tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}$$

Pomoću jednadžbe za matricu $\mathbf{L}_{AB}$ bit će

$$\mathbf{E}\mathbf{G}^T = \left(2e_0^2 - 1\right)\mathbf{J} + 2\left(\mathbf{e}\mathbf{e}^T + e_0\tilde{\mathbf{e}}\right) = \mathbf{L}_{AB}$$

Druga lema

$$\dot{\mathbf{E}}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}} \qquad 1.56$$

Dokaz

$$\dot{\mathbf{E}}\mathbf{G}^T = [-\dot{\mathbf{e}} \quad \dot{e}_0\mathbf{J} + \dot{\tilde{\mathbf{e}}}] \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{e}^T \\ e_0\mathbf{J} + \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{e}}\mathbf{e}^T + \dot{e}_0 e_0\mathbf{J} + e_0\dot{\tilde{\mathbf{e}}} + \dot{e}_0\tilde{\mathbf{e}} + \dot{\tilde{\mathbf{e}}}\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T = [-\mathbf{e} \quad e_0\mathbf{J} + \tilde{\mathbf{e}}] \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{e}}^T \\ \dot{e}_0\mathbf{J} + \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \end{bmatrix} = \mathbf{e}\dot{\mathbf{e}}^T + e_0\dot{e}_0\mathbf{J} + \dot{e}_0\tilde{\mathbf{e}} + e_0\dot{\tilde{\mathbf{e}}} + \tilde{\mathbf{e}}\dot{\tilde{\mathbf{e}}}$$

a s obzirom na svojstva Hamilton-Rodriguezovih parametara dokazana je druga lema.

Treća lema

$$\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E} = \mathbf{J} - \mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}} \qquad 1.57$$

Dokaz

$$\mathbf{E}^T\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}^T \\ e_0\mathbf{J} - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & e_0\mathbf{J} + \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T\mathbf{e} & -e_0\mathbf{e}^T - \mathbf{e}^T\tilde{\mathbf{e}} \\ -e_0\mathbf{e} & e_0^2\mathbf{J} - \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$

Kako je

$$-\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{e}} = \left(\tilde{\mathbf{e}}\mathbf{e}\right)^{\mathrm{T}} = 0$$

i prema polaznoj jednadžbi, dobivamo konačno

$$\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{e}_0^2 & -\mathrm{e}_0\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ -\mathrm{e}_0\mathbf{e} & \mathbf{J} - \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \mathbf{J} - \mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}.$$

Isto tako možemo dokazati i drugi oblik treće leme

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G} = \mathbf{J} - \mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}. \qquad 1.58$$

Četvrta lema

$$\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{E}\mathbf{p} = 0 \qquad 1.59$$

Dokaz:

$$\mathbf{Gp} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & e_0\mathbf{J} - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = -\mathbf{e}e_0 + e_0\mathbf{e} - \tilde{\mathbf{e}}\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Analogno tomu je i $\mathbf{Ep} = 0$.

Peta lema

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T \text{ jednako je koso simetričnoj matrici od } \mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} \qquad 1.60$$

Dokaz

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & e_0\mathbf{J} - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{e}}^T \\ \dot{e}^T\mathbf{J} + \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \end{bmatrix} = \mathbf{e}\dot{\mathbf{e}}^T + e_0\dot{\tilde{\mathbf{e}}} - \dot{e}_0\tilde{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}\mathbf{e}^T .$$

Uz pomoć treće leme biti će

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T = \mathbf{e}\dot{\mathbf{e}}^T + e_0\dot{e}_0\mathbf{J} + e_0\dot{\tilde{\mathbf{e}}} - \dot{e}_0\tilde{\mathbf{e}} - \left(\dot{\mathbf{e}}\mathbf{e}^T + e_0\dot{e}_0\mathbf{J}\right) = \mathbf{e}\dot{\mathbf{e}}^T + e_0\dot{\tilde{\mathbf{e}}} - \dot{e}_0\tilde{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}\mathbf{e}^T .$$

Odredimo vektor

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & e_0\mathbf{J} - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -\dot{e}_0\mathbf{e} + e_0\dot{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{e}} .$$

Kako je

$$\tilde{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} -e_3\dot{e}_2 + e_2\dot{e}_3 \\ e_3\dot{e}_1 - e_1\dot{e}_3 \\ -e_2\dot{e}_1 + e_1\dot{e}_2 \end{bmatrix},$$

bit će koso simetrična matrica od ovog vektora

$$\begin{bmatrix} 0 & \dot{e}_1e_2 - e_1\dot{e}_2 & \dot{e}_1e_3 - e_1\dot{e}_3 \\ \dot{e}_2e_1 - e_2\dot{e}_1 & 0 & \dot{e}_2e_3 - e_2\dot{e}_3 \\ \dot{e}_3e_1 - e_3\dot{e}_1 & \dot{e}_3e_2 - e_3\dot{e}_2 & 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{e}}\mathbf{e}^T - \mathbf{e}\dot{\mathbf{e}}^T .$$

Na temelju ovog rezultata koso simetrična matrica $\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}$ bit će

$$-\dot{e}_0\tilde{\mathbf{e}} + e_0\dot{\tilde{\mathbf{e}}} - \dot{\mathbf{e}}\mathbf{e}^T + \mathbf{e}\dot{\mathbf{e}}^T ,$$

što je trebalo dokazati.

Derivacije Hamilton-Rodriguezovih parametara nalazimo na slijedeći način. Polazimo od jednadžbe:

$$\dot{\mathbf{L}}_{BA} = -\tilde{\mathbf{\Omega}}^{B}_{B/A}\mathbf{L}_{BA} ,$$

ili poslije transformiranja

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}^{B}_{B/A} = \mathbf{L}^T_{AB}\dot{\mathbf{L}}_{AB} .$$

Prema značajkama pomoćnih matrica iz prve i druge leme:

$$\mathbf{L}_{AB} = \mathbf{E}\mathbf{G}^T$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{AB} = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{G}^T + \mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T = 2\mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T$$

bit će

$$\widetilde{\mathbf{\Omega}}^B_{B/A} = 2\left(\mathbf{E}\mathbf{G}^T\right)^T \mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T = 2\mathbf{G}\mathbf{E}^T\mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T = 2\mathbf{G}\left(\mathbf{J} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right)\dot{\mathbf{G}}^T = 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T - 2\mathbf{G}\mathbf{p}\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{G}}^T$$

te s obzirom na četvrtu lemu po kojoj je $\mathbf{G}\mathbf{p} = 0$, bit će:

$$\widetilde{\mathbf{\Omega}}^A_{B/A} = 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T ,$$

a s obzirom na petu lemu

$$\widetilde{\mathbf{\Omega}}^B_{B/A} = 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} .$$

Pomnožimo ispred ovu jednadžbu s $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$.

$$\mathbf{G}^T\widetilde{\mathbf{\Omega}}^B_{B/A} = 2\mathbf{G}^T\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} .$$

S obzirom na dodatnu treće lemu, dobivamo:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{\Omega}^B_{B/A} = 2\left(\mathbf{J} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\right)\dot{\mathbf{p}} = 2\left(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{p}}\right).$$

Kako je $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{p}} = 0$ bit će konačno:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{G}^T\mathbf{\Omega}^B_{B/A} . \tag{1.61}$$

U ovoj jednadžbi komponente rotacije definirane su u koordinatnom sustavu B. Ova matrična jednadžba trebati će nam u raspisanom obliku.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ e_0\mathbf{J} + \widetilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{1.62}$$

1.3 Koordinatni sustavi

U mehanici leta zrakoplova koristimo nekoliko koordinatnih sustava. Svaki problem zahtijeva neki primjeren kooordinatni sustav. Tako određivanje aerodinamičkih sila i njihovih momenata vezujemo za ravninu simetrije letjelica ili za pravac aerodinamičke brzine, dok performanse zrakoplova izučavamo u odnosu na Zemlju, pa u tom slučaju postavljamo koordinatni sustav vezan za Zemlju. Kada se bavimo interkontinentalnim letovima, koristimo koordinatni sustav postavljen u središtu zemlje, a kad promatramo lokalne letove, služimo se nekim lokalnim kooridnatnim sustavom, itd. Gibanje središta Zemlje oko Sunca u vremenskom intervalu u kojemu izučavamo letjelicu je praktično pravocrtno s konstantnom brzinom. Zato je koordinatni sustav s ishodištem u središtu Zemlje, a koji se ne okreće sa Zemljom*, inercijski koordinatni sustav* (I). Svi ostali koordinatni sustavi jesu relativni, u kojima djeluju i inercijske sile, jer svi imaju neku kutnu brzinu. Kao što je spomenuto na početku, svaki se problem može najprikladnije riješiti u nekom od koordinatnih sustava. S obzirom na probleme koje ćemo razmatrati u ovoj knjizi, trebamo pet koordinatnih sustava:

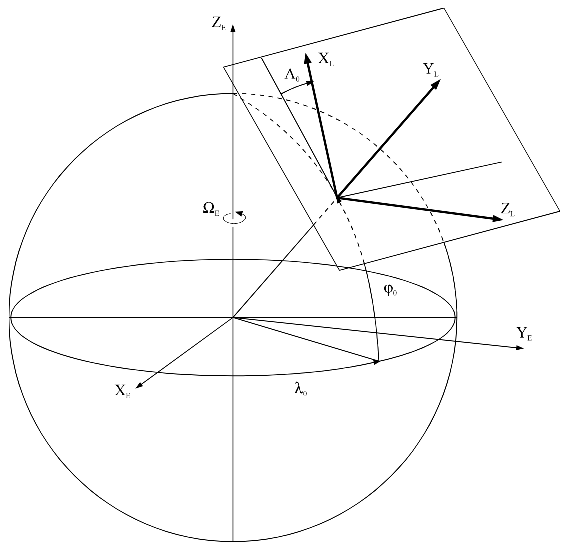
- *lokalni koordinatni sustav* (L),
- *nošeni koordinatni sustav* (O),
- *koordinatni sustav letjelice* (F),
- *aerodinamički koordinatni sustav* (A) i
- *brzinski koordinatni sustav* (V).

Napomenimo da su svi koordinatni sustavi desni, što znači da je dovoljno definirati dvije osi, a treća čini desni trijedar. Uvijek si možemo pomoći desnom šakom, ako palac, kažiprst i srednjak namjestimo okomito jedan na drugi. Palac tada označuje os-x, kažiprst os-y, a srednjak os-z. Za svaki koordinatni sustav trebamo znati, osim definicije pravca dviju osi, njegovu kutnu brzinu i kutove u odnosu na neki prethodno definirani koordinatni sustav. Kutna brzina nužna je da bismo odredili inercijsku silu, a kutovi da bismo odredili matricu transformacije u taj koordinatni sustav iz nekog drugog koordinatnog sustava.

Kutna brzina i njene komponente imat će indeks dolje kako bi se označilo na koji se koordinatni sustav odnosi ta kutna brzina, a indeks gore označavat će koordinatni sustav na čijim osima su komponente. Primjerice komponente kutne brzine označavamo uvijek sa $\begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}$. Ako su to komponente kutne brzine brzinskog koordinatnog sustava na osi aerodinamičkog koordinatnog sustava ona ih označavamo sa $\begin{bmatrix} p_V^A & q_V^A & r_V^A \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}_V^A$.

1.3.1 Lokalni koordinatni sustav (L)

Ishodište je ovog koordinatnog sustava na mjestu polijetanja letjelice. Os x_L je horizontalna u pravcu zadanog azimuta A_0. Kut azimuta se mjeri u pozitivnom trigonometrijskom smjeru kada se gleda odozdo, a kad kut azimuta gledamo odozgo onda je on pozitivan u smjeru kazaljke na satu. Os y_L je vertikalna prema gore. Geocentrične koordinate ishodišta su $\lambda_0, \varphi_0, h_0$ (indeks nula podsjeća da se radi o ishodištu, kada je vrijeme obično jednako nuli). (slika 1-3). S obzirom na to što je lokalni koordinatni sustav vezan za Zemlju, on ima istu kutnu brzinu kao i zemlja $\Omega_\mathrm{E} = 7.27\,10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$.



Slika 1-3. Lokalni koordinatni sustav

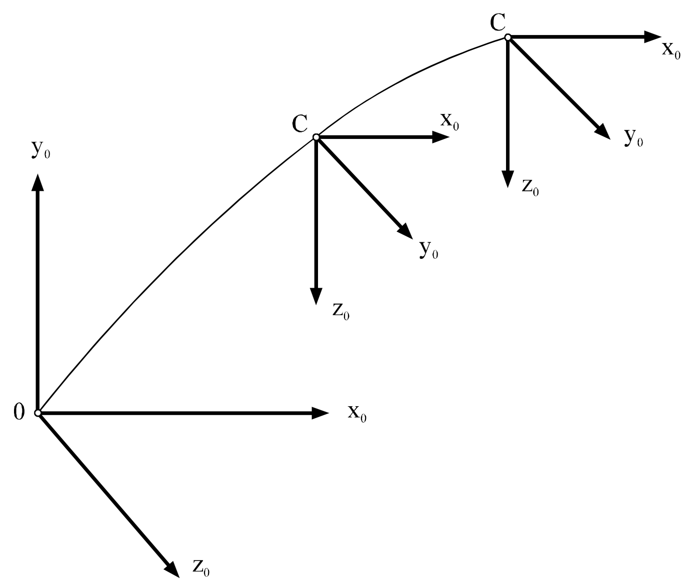
Budući da se taj koordinatni sustav okreće sa Zemljom konstantnom kutnom brzinom, gibanje je u tom kordinatnom sustavu relativno gibanje. To znači da postoje dvije inercijalne sile: centrifugalna i Coriolisova. Inercijalna centrifugalna sila koja se pojavljuje zbog ove kutne brzine zbraja se s privlačnom silom Zemlje i zajedno čine silu Zemljine teže. Drugim riječima, težina svake mase je zbroj dviju sila: privlačne sile Zemlje i centrifugalne sile zbog rotacije te mase zajedno sa Zemljom. Drugu inercijalnu silu uslijed Coriolisova ubrzanja $2\vec{\Omega}_E \times \vec{V}_K$ zanemarujemo jer je ona zbog male kutne brzine vrlo mala u odnosu na težinu. Primjerice je za brzinu leta 240 m/s u smjeru istoka ili zapada Coriolisova ubrzanja najveće i iznosi $0.035\, m/s^2$, što zanemarujemo u odnosu na ubrzanje težine $9.81\, m/s^2$, a u slučaju leta s juga na sjever i obrnuto Coriolisovo ubrzanje je nula.

1.3.2 Nošeni koordinatni sustav (O)

Nošeni koordinatni sustav ima ishodište u središtu mase letjelice. Os x_O je u horizontalnoj ravnini, a z_O je vertikalna u smjeru prema dolje (slika 1-4). Zanemarujemo li

- zakrivljenost Zemljine površine, onda su kutovi $\lambda = \lambda_0$ i $\varphi = \varphi_0$ konstantni i
- kutnu brzinu Zemlje $\Omega_E = 0$,

onda nošeni koordinatni sustav nema kutnu brzinu $\boldsymbol{\Omega}_O^O = 0$, tj. nošeni koordinatni sustav ne rotira tijekom leta, već ostaje paralelan samom sebi. U svim problemima koje razmatramo u ovoj knjizi opravdane su ove dvije pretpostavke o zanemarivanju zakrivljenosti Zemljinine površine i o zanemarivanju kutne brzine..



Slika 1-4. Translacija nošenog koordinatnog sustava kada je $\dot{\lambda} = \dot{\varphi} = 0$

Radi pojednostavljenja, postavljamo nošeni koordinatni sustav paralelno s lokalnim, pa zato on ostaje u tijeku leta paralelan s lokalnim koordinatnim sustavom, ali putuje sa središtem mase letjelice (zato smo mu dali ime "nošeni", slika 1-5). U odnosu na nošeni koordinatni sustav definiramo “stav” letjelice i izučavamo njeno gibanje oko središta mase.

1.3.3 Koordinatni sustav letjelice (F)

Ovaj koordinatni sustav Oxyz kruto je vezan za letjelicu. Najprikladnije je usvojiti glavne ose tromosti kao koordinatni sustav letjelice, a da je njegovo ishodište u središtu mase (ako se drukčije ne odredi). Os x i os z nalaze se u ravnini simetrije letjelice i to os x duž tijela u smjeru leta, a os z je nadolje, dok je os y okomita na ravninu simetrije. Zato što je taj koordinatni sustav kruto vezan za letjelicu, njegova je kutna brzina ujedno i kutna brzina letjelice. Slovo F sa kojim označavamo taj koordinatni sustav dolazi od engleske riječi "*frame*", ali kako je to najviše upotrebljavan koordinatni sustav, sve veličine definirane u tom koordinatnom sustavu nemaju nikakvih oznaka. Usmjerenost tog koordinatnog sustava određena je u odnosu na nošeni pomoću tri kuta (slika 1-5)

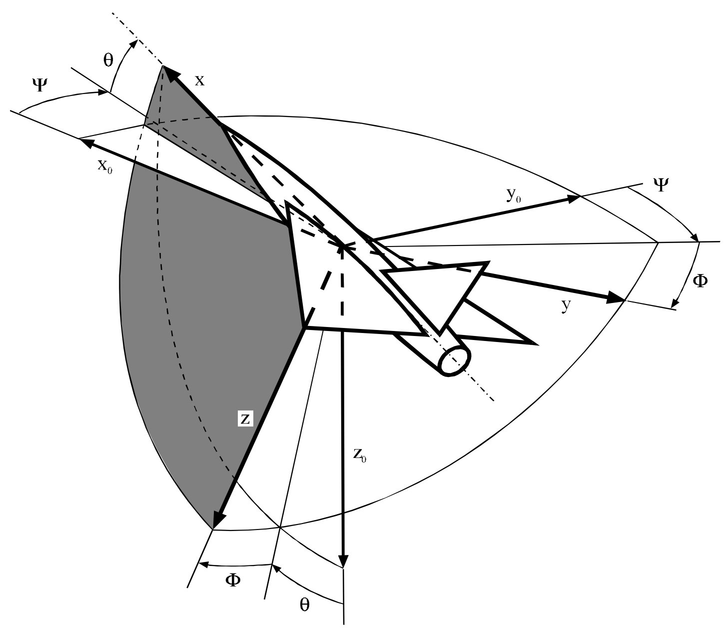
ψ u horizontalnoj ravnini oko osi z_O, nazivamo ga *kut zanosa,*

θ u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi $\tilde{y}$, nazivamo ga *kut propinjanja,*

ϕ oko osi x, nazivamo ga *kut valjanja letjelice*.

Matrica transformacije za ove tri rotacije ψ, θ, ϕ je

$$\mathbf{L}_{FO} = \mathbf{L}_X(\phi)\,\mathbf{L}_Y(\theta)\,\mathbf{L}_Z(\psi), \qquad 1.63$$



Slika 1-5. Koordinatni sustav letjelice

što pišemo kraće $\mathbf{L}_{FO}(\phi,\vartheta,\psi)$. Kutna brzina letjelice koja je i kutna brzina njenog koordinatnog sustava

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\phi}} \qquad 1.64$$

ima projekcije na osi tog koordinatnog sustava

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}_{FO}\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\psi}\end{bmatrix} + \mathbf{L}_X(\phi)\begin{bmatrix}0\\\dot{\theta}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Poslije množenja matrica i zamjene dobivamo

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi}\\\dot{\psi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\\\dot{\psi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\phi\end{bmatrix}. \qquad 1.65$$

Kao što je već spomenuto, nije potrebno posebno označavati da su to projekcije na osi letjelice, jer kada nije tako onda to i posebno označimo. Matricu na desnoj strani gornje jednadžbe možemo rastaviti u produkt dviju matrica

$$\begin{bmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi}\\\dot{\psi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\\\dot{\psi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{bmatrix}$$

Matricu 3×3 na desnoj strani označavamo sa **R**. Ona je funkcija dvaju kutova ϕ i ϑ, nije matrica transformacije i na nju se ne odnose pravila o matrici transformacija. Sa **s** označavamo novi pojam ***stav.*** To je matrica koju čine tri kuta

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix}\phi & \theta & \psi\end{bmatrix}^T. \qquad 1.66$$

S ovim oznakama je

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}(\phi,\vartheta)\cdot\dot{\mathbf{s}}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}(\phi,\vartheta)^{-1}\cdot\boldsymbol{\Omega}, \qquad 1.67$$

ili

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \sin\phi\, tg\theta & \cos\phi\, tg\theta\\0 & \cos\phi & -\sin\phi\\0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}. \qquad 1.68$$

1.4 Brzine letjelice

Razlikujemo dvije brzine letjelice. Prva je brzina letjelice u odnosu na Zemlju. Nazivamo je *brzina leta* i označavamo je sa $\vec{V}_K$. Druga je brzina letjelice u odnosu na zrak $\vec{V}$ i nju nazivamo *aerodinamička brzina* (bez indeksa). Između te dvije brzine imamo vezu

$$\vec{V}_K = \vec{V}_W + \vec{V}, \qquad 1.69$$

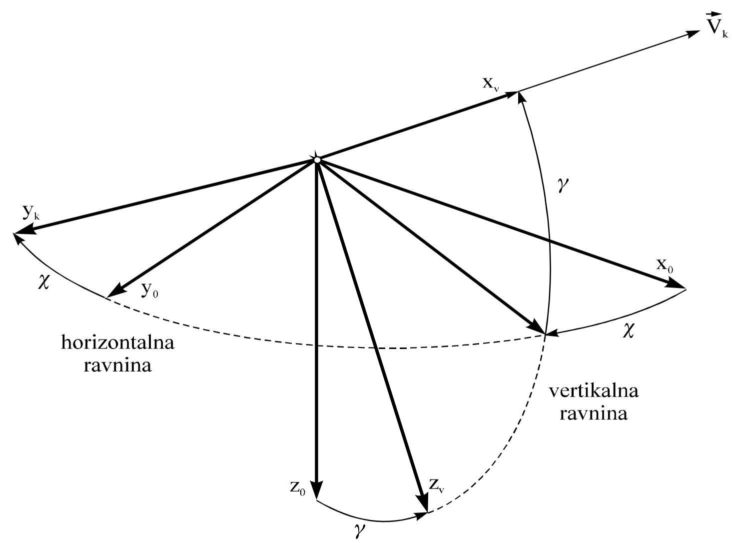
gdje je $\vec{V}_W$ brzina zraka (u odnosu na Zemlju) ili, kratko, *vjetar*.

Ponekad nam je potrebna brzina zraka u odnosu na letjelicu, ali ne u neposrednoj blizini letjelice, gdje je zračna struja poremećena prisutnošću letjelice. Tu brzinu nazivamo "brzina opstrujavanja", a označavamo je sa $\vec{V}_\infty$. Ona je jednaka po intenzitetu i pravcu aerodinamičkoj brzini, ali suprotnog je smjera. Drugim riječima, brzina opstrujavanja je $\vec{V}_\infty = -\vec{V}$.

1.4.1 Brzina leta i brzinski koordinatni sustav (V)

Kao što je rečeno brzina leta je brzina letjelice u odnosu na Zemlju. Ona je određena svojim intenzitetom V_K i pomoću dva kuta (slika 1-6).

- χ je kut u horizontalnoj ravnini oko osi z_O od osi x_O do horizontalne projekcije brzine (pozitivan oko osi *z* prema dolje), nazivamo ga *kut skretanja*,
- γ je u vertikalnoj ravnini od horizontalne projekcije do brzine leta (pozitivan prema gore), nazivamo ga *kut prenjanja*.



Slika 1-6. Brzinski koordinatni sustav

Projekcije brzine leta na osi letjelice obilježavamo uvijek sa

$$\mathbf{V}_K = \begin{bmatrix} u_K & v_K & w_K \end{bmatrix}^T. \tag{1.70}$$

Za rješenje nekih problema kao što su to izračunavanja performansa zrakoplova, dovoljno je promatrati samo gibanje središta mase. Tada je pogodno primjenjivati brzinski koordinatni sustav. Brzinski koordinatni sustav ima os x_V u pravcu i smjeru brzine leta, os

z_V mu je u vertikalnoj ravnini kroz brzinu leta prema dolje, a os y_V koja čini desni koordinatni sustav je horizontalna. Prema slici 1-6 iz nošenog koordinatnog sustava "O" u brzinski prelazi se s dvije rotacije: prvo oko osi z_0 za kut χ, a zatim oko osi y_V za kut γ:

$$\mathbf{L}_{VO} = \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi). \qquad 1.71$$

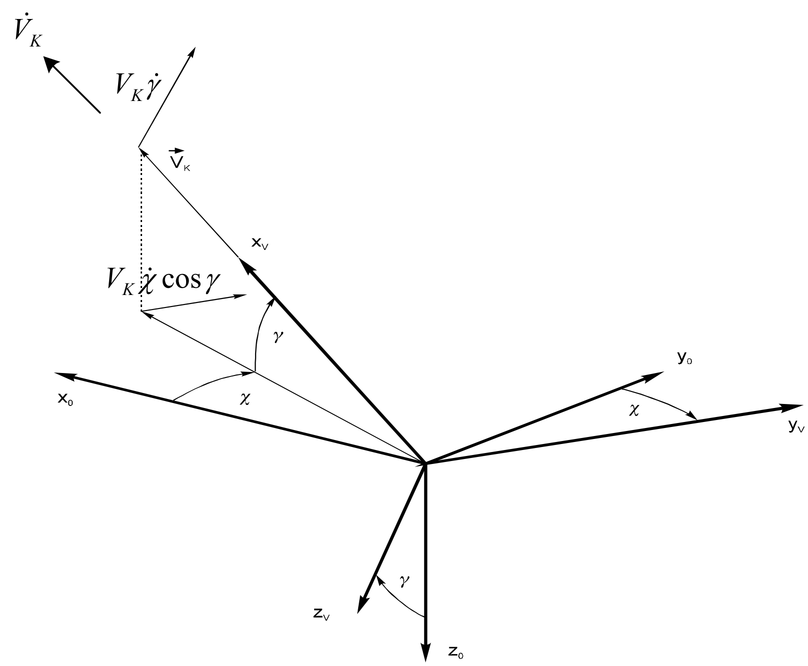
Taj koordinatni sustav ima dvije kutne brzine:

- $\dot{\chi}$ kutnu brzinu oko vertikalne osi z_0 i
- $\dot{\gamma}$ oko horizontalne osi y_V

$$\vec{\Omega}_V = \vec{\dot{\chi}} + \vec{\dot{\gamma}}, \qquad 1.72$$

ili

$$\Omega_V^V = \mathbf{L}_{VO}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\chi}\,sin\,\gamma \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\chi}\,cos\,\gamma \end{bmatrix}. \qquad 1.73$$



Slika 1-7. Ubrzanja uzduž osi brzinskoga koordinatnog sustava

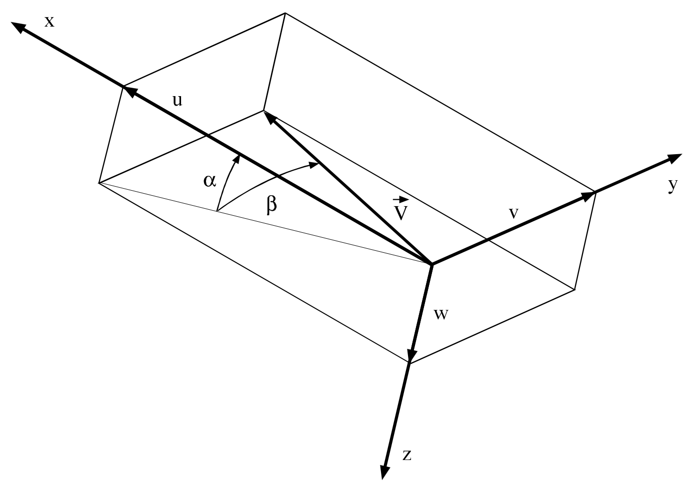
Komponente brzine leta u brzinskom koordinatnom sustavu su $\mathbf{V}_K^V = [V_K \quad 0 \quad 0]^T$, pa su komponente ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{a}^V = \dot{\mathbf{V}}_K^V + \widetilde{\Omega}_V^V \mathbf{V}_K^V = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\chi}\cos\gamma & \dot{\gamma} \\ \dot{\chi}\cos\gamma & 0 & \dot{\chi}\sin\gamma \\ -\dot{\gamma} & -\dot{\chi}\sin\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ V_K\dot{\chi}\cos\gamma \\ -V_K\dot{\gamma} \end{bmatrix}^T . \quad 1.74$$

Do tih komponenata ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu mogli smo doći ako tražimo komponente brzine hodografa. Iz mehanike znamo da je hodograf putanja točke čiji je vektor položaja brzina. Znamo da je brzina derivacija vektora položaja. Ako je vektor položaja jednak brzini leta, onda je derivacija tog vektora položaja tj. brzina hodografa jednaka ubrzanju.

1.4.2 Aerodinamička brzina i aerodinamički koordinanti sustav (A)

Položaj aerodinamičke brzine određujemo prvenstveno u odnosu na letjelicu, jer o njenom intenzitetu i položaju u odnosu na letjelicu ovise aerodinamičke sile i momenti. Primjenjuju se dva načina za određivanje položaja aerodinamičke brzine u odnosu na letjelicu.



Slika 1-8. Napadni kut i kut klizanja

<u>Prvi način</u> su kutovi α i β. Napadni kut α nalazi su u ravnini simetrije (vanjske površine letjelice), od projekcije aerodinamičke brzine na tu ravninu do osi x letjelice u toj ravnini (slika 1-8), a kut klizanja β je od projekcije aerodinamičke brzine do aerodinamičke brzine. Drugim riječima, kut klizanja je otklon aerodinamičke brzine od ravnine simetrije letjelice (simetrije vanjske površine letjelice). Sa tim kutovima komponente aerodinamičke brzine u koordinatnom sustavu letjelice su

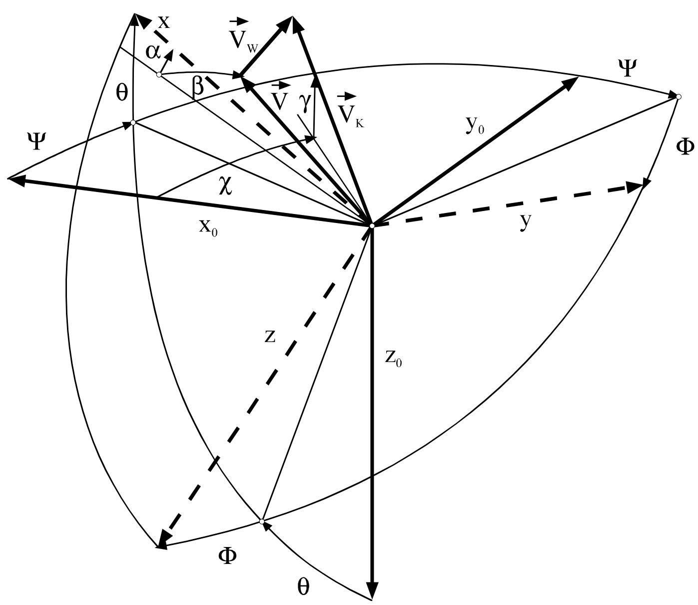
$$u = V\cos\beta\cos\alpha$$
$$v = V\sin\beta \qquad 1.75$$
$$w = V\cos\beta\sin\alpha\,.$$

Na osnovu tih jednadžbi dobivamo zavisnost napadnog kuta i kuta klizanja od komponenti aerodinamičke brzine:

$$sin\,\beta = \frac{v}{V} \qquad tg\alpha = \frac{w}{u}\ . \qquad 1.76$$

Uočavamo da je napadni kut α pozitivan kad je pozitivna komponenta w, te isto tako da je kut klizanja pozitivan ako je pozitivna komponenta v aerodinamičke brzine. To je najsigurniji način kontrole predznaka napadnog kuta i kuta klizanja. Vrlo često su os letjelice i aerodinamička brzina vrlo blizu, te su napadni kut i kut klizanja mali kutovi. To nam omogućava primjenu pojednostavljenih jednadžba

$$v = \beta V \qquad w = \alpha V\ . \qquad 1.77$$



Slika 1-9. Kutovi ψ, θ, ϕ, α, β, χ, γ .

<u>Drugi način</u> su kutovi χ_A i γ_A (isto kao što su kutovi χ i γ za brzinu leta).

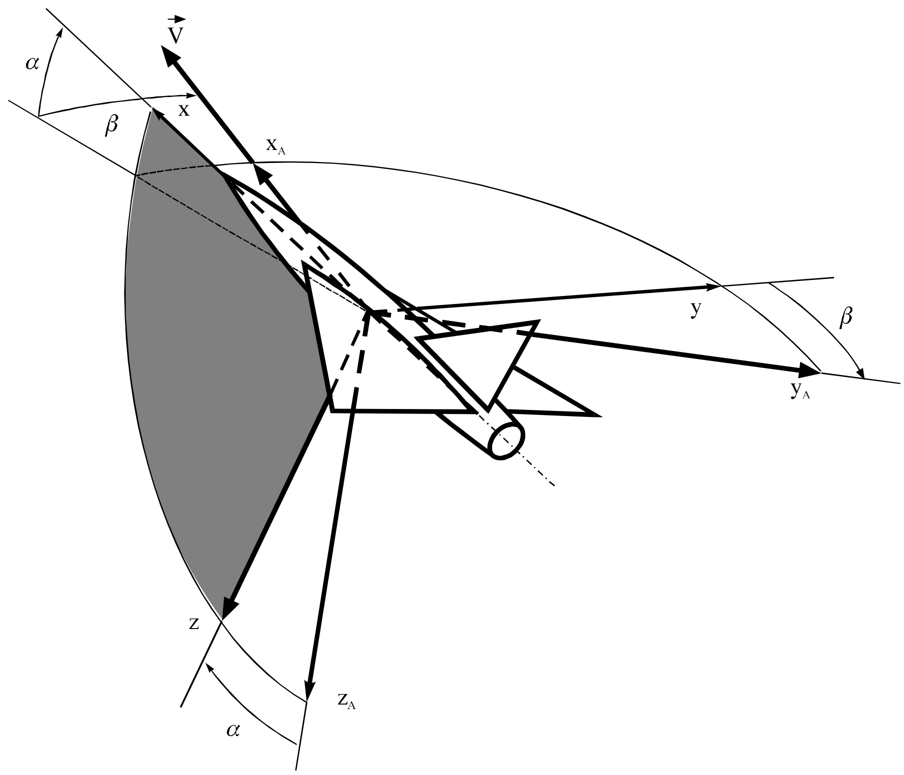
Kut χ_A je u horizontalnoj ravnini od osi x_0 nošenog koordinatnog sustava do projekcije aerodinamičke brzine na horizontalnu ravninu, a kut γ_A je u vertikalnoj ravnini od horizontalne projekcije aerodinamičke brzine do aerodinamičke brzine letjelice.

Između kutova χ_A, γ_A i kutova ψ, θ, ϕ, α, β postoje veze. Te veze dobivaju se iz relacije:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{FO}\mathbf{V}^{O}$$

$$\begin{bmatrix} V\cos\beta\cos\alpha \\ V\sin\beta \\ V\cos\beta\sin\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{FO}(\phi,\vartheta,\psi)\begin{bmatrix} V\cos\gamma_A\cos\chi_A \\ V\cos\gamma_A\sin\chi_A \\ -V\sin\gamma_A \end{bmatrix}.$$

Možemo skratiti aerodinamičku brzinu na lijevoj strani s aerodinamičkom brzinom na desnoj i tako dobiti tri jednadžbe, od kojih su dvije neovisne, a treća se može dobiti kombinacijom tih dviju odabranih jednadžbi.



Slika 1-10. Aerodinamičke osi i glavne osi tromosti

U aerodinamici zrakoplovnih konfiguracija upotrebljava se osim koordinatnog sustava letjelice i aerodinamički koordinatni sustav (slika 1-10). Njegovo ishodište je u središtu mase ili nekoj određenoj točki letjelice, a os x_A je u pravcu i smjeru aerodinamičke brzine. Os z_A je u ravnini simetrije letjelice. Kako je ta os okomita na aerodinamičku brzinu (jer je brzina na osi x_A), ona se nalazi u presjeku dviju ravnina, ravnine okomite na aerodinamičku brzinu i ravnine simetrije letjelice.

Najviše trebamo matricu transformacije u koordinatni sustav letjelice iz aerodinamičkog koordinatnog sustava. Ta transformacija predstavlja dvije sukcesivne rotacije (vidi sliku 1-10):

- prvo, oko osi z_A za kut β i to u negativnom smjeru rotacije (dok os x_A ne uđe u ravninu simetrije letjelice)
- drugo, oko novodobivene osi y, za kut α (dok os x_A ne dođe u položaj osi x).

Prema tome je matrica transformacije

$$\mathbf{L}_{FA} = \mathbf{L}_Y(\alpha)\,\mathbf{L}_Z(-\beta), \qquad 1.78$$

što množenjem daje

$$\mathbf{L}_{FA} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix}. \qquad 1.79$$

Ako su kutovi mali, onda je

$$\mathbf{L}_{FA} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & -\alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad 1.80$$

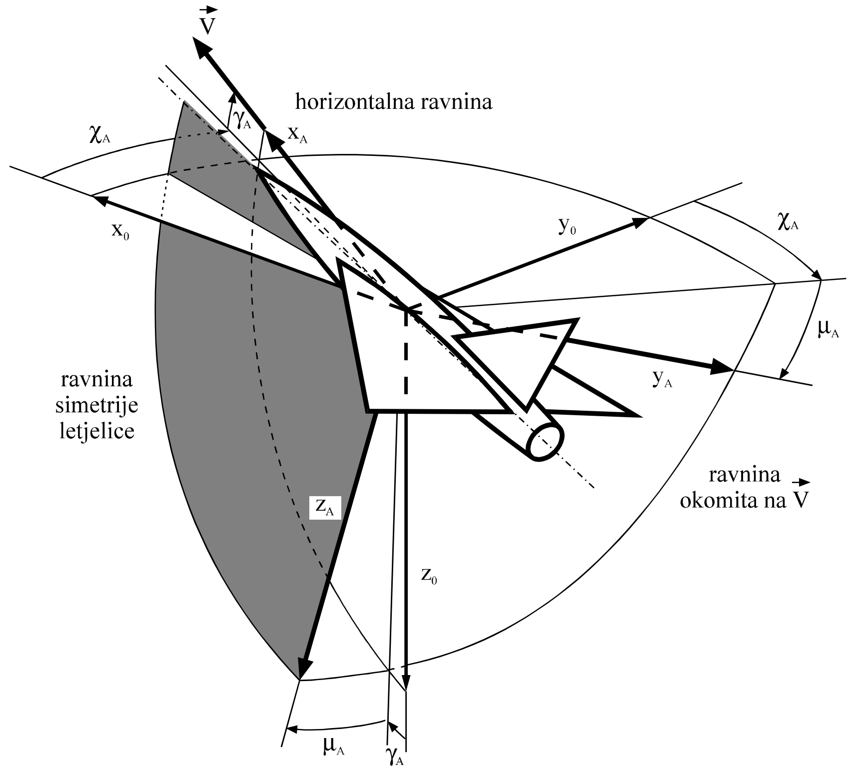
Od nošenog koordinatnog sustava do brzinskog dolazimo pomoću tri rotacije (slika 1-11)

- za kut χ_A u horizontalnoj ravnini oko osi z_0 do horizontalne projekcije aerodinamičke brzine;
- za kut γ_A u vertikalnoj ravnini oko osi y, od horizontalne projekcije do aerodinamičke brzine;
- za kut μ_A oko aerodinamičke brzine dok os z ne uđe u ravninu simetrije letjelice.

To znači da je matrica transformacije u aerodinamički iz nošenog koordinatnog sustava

$$\mathbf{L}_{AO}(\mu_A,\gamma_A,\chi_A) = \mathbf{L}_X(\mu_A)\mathbf{L}_Y(\gamma_A)\mathbf{L}_Z(\chi_A). \qquad 1.81$$

Uočimo da je to ista matrična funkcija kao $\mathbf{L}_{FO}(\phi,\vartheta,\psi)$.



Slika 1-11. Transformacija iz nošenog koordinatnog sustava
u aerodinamički koordinatni sustav

Kada nema vjetra, možemo lako usporediti aerodinamički i brzinski koordinatni sustav, jer su tada brzina leta i aerodinamička brzina jednake, pa oba koordinatna sustava imaju istu os *x*. Osi z_A i z_V se razlikuju. Obje su u ravnini okomitoj na brzinu, ali dok je os z_A u ravnini simetrije letjelice, os z_V je u vertikalnoj ravnini kroz brzinu (slika 1-11). Između njih je kut μ_A koji se nalazi u ravnini okomitoj na brzinu od osi z_V do osi z_A, mjeren oko brzine. Zato je matrica transformacije iz aerodinamičkog u brzinski koordinatni sustav

$$\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_X\left(-\mu_A\right). \qquad 1.82$$

Kada nema vjetra, može se lako prijeći iz koordinatnog sustava letjelice u brzinski kroz aerodinamički koordinatni sustav. Matrica transformacije u brzinski iz koordinatnog sustav letjelice jest produkt dviju matrica

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA}\mathbf{L}_{AF}, \qquad 1.83$$

pa se množenjem matrica $\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)$ i $\mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_Z(\beta)\mathbf{L}_Y(-\alpha)$, dobiva tražena matrica transformacije

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Z(\beta)\mathbf{L}_Y(-\alpha) \tag{1.84}$$

<u>koja vrijedi samo u slučaju ako nema vjetra</u>.

1.4.3 Primjer

Zadana je brzina horizontalnog leta $V_K = 54.4\,[m/s]$ i njen kut pravca $\chi = 10.8^0$. Intenzitet brzine vjetra je $V_W = 8\,[m/s]$, koji puše iz pravca čiji je azimut $A_W = 120^0$, a to znači da je kut pravca kud puše vjetar $\chi_W = 300^0$. Treba odrediti aerodinamičku brzinu, napadni kut i kut klizanja kada je stav zrakoplova $\mathbf{s} = \left[-2.5^0 \quad 2.9^0 \quad 19^0\right]^T$

Projekcije su brzine leta na osi nošenog koordinatnog sustava:

$$\vec{\mathbf{V}}_K^O = \begin{bmatrix} V_K \cos\gamma \cos\chi \\ V_K \cos\gamma \sin\chi \\ -V_K \sin\gamma \end{bmatrix}$$

Uvijek pretpostavljamo da je vjetar horizontalan te su njegove projekcije na osi nošenog koordinatnog sustava:

$$\vec{\mathbf{V}}_W^O = \begin{bmatrix} V_W \cos\chi_W \\ V_W \sin\chi_W \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Projekcije aerodinamačke brzine na iste osi nošenog koordinatnog sustava bit će:

$$\mathbf{V}^O = \mathbf{V}_K^O - \mathbf{V}_W^O.$$

Intenzitet ove brzine je

$$V = \sqrt{\left(u^O\right)^2 + \left(v^O\right)^2 + \left(w^O\right)^2},$$

a njene su projekcije na osi letjelice

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}_{FO}\mathbf{V}^O = \mathbf{L}_{FO}\left(\mathbf{V}_K^O - \mathbf{V}_W^O\right).$$

Matrica transformacije u koordinatni sustav letjelice iz nošenog koordinatnog sustava jest produkt triju temeljnih matrica:

$$\mathbf{L}_{FO} = \mathbf{L}_X(\phi)\cdot\mathbf{L}_Y(\vartheta)\cdot\mathbf{L}_Z(\psi)$$

Na osnovu tih vrijednosti izračunavamo komponente aerodinamičke brzine u koordinatnom sustavu letjelice, a s tim komponentama bit će napadni kut i kut klizanja

$$\alpha = \arctan\frac{w}{u}$$

$$\beta = \arcsin\frac{v}{V}\,.$$

Rješenje se nalazi u fileu *primjer.m.* na disketi u direktoriju *kinematika*.