

4 BOČNA SILA, MOMENTI SKRETANJA I VALJANJA

4.1 Bočna sila i moment skretanja

Vidjeli smo da je opći izraz za aerodinamičke koeficijente bočne sile i momenta skretanja

$$\begin{aligned} C_Y &= C_Y(\beta, r^*, p^*, \delta_n, \delta_\ell) \\ C_n &= C_n(\beta, r^*, p^*, \delta_n, \delta_\ell) \end{aligned} \quad 4.1$$

Ove funkcije mogu se linearizirati razvijanjem u red i zanemarivanjem malih veličina drugoga i višega reda. Kut klizanja nije velik, jer prema propisima ne smije biti veći od 0.2 radijana, kutne brzine r^* i p^* su male, a nelinearnosti zbog povećanih otklona krilaca δ_ℓ i kormila pravca δ_n uzet ćemo posebno u obzir. U većini slučajeva ti uvjeti za linearizaciju su ispunjeni te koristimo linearnu zavisnost koeficijenta valjanja od parametara.

$$\begin{aligned} C_Y &= C_{Y\beta}\beta + C_{Yr}r^* + C_{Yp}p^* + C_{Y\delta_n}\delta_n + C_{Y\delta_\ell}\delta_\ell \\ C_n &= C_{n\beta}\beta + C_{nr}r^* + C_{np}p^* + C_{n\delta_n}\delta_n + C_{n\delta_\ell}\delta_\ell. \end{aligned} \quad 4.2$$

Koeficijenti $C_{Y\beta}$ i $C_{n\beta}$ uz parametar β , C_{Yr} i C_{nr} uz bezdimenzijsku kutnu brzinu skretanja r^* , C_{Yp} i C_{np} uz bezdimenzijsku kutnu brzinu valjanja p^* , $C_{Y\delta_n}$ i $C_{n\delta_n}$ uz otklon kormila pravca δ_n kao i koeficijenti $C_{Y\delta_\ell}$ i $C_{n\delta_\ell}$ uz otklon krilaca δ_ℓ a priori su funkcije Machova broja. Za subsonične zrakoplove, pa donekle i za supersonične, kada su promjene Machova broja male, mogu se smatrati konstantnim. Međutim kada su otkloni upravljačkih površina veći od 10^0 , treba imati na umu da su zbog nelinearnosti gradijenti $C_{Y\delta_n}$ i $C_{n\delta_n}$ ovisni i o otklonu kormila pravca δ_n , a $C_{Y\delta_\ell}$ i $C_{n\delta_\ell}$ o otklonu krilaca δ_ℓ . Točniju procjenu ovih derivativa možemo naći u lit.[28] i [29].

4.1.1 Gradijenti bočne sile i momenta skretanja po kutu klizanja

Gradijent bočne sile zbog kuta klizanja uzrokuje najvećim djelom vertikalni rep. Ta sila na vertikalnom repu u pravcu je osi y , ali suprotnoga smjera. Njen je intenzitet

$$\eta_V \frac{\rho V^2}{2} S_V (C_{N\alpha})_V K_{VB} \beta_V. \quad 4.3$$

Brzina zračne struje na repu nije ista kao brzina ispred zrakoplova pa zato postoji promjena dinamičkog tlaka η_V kao u i slučaju horizontalnog repa, ali su gubitci na vertikalnom repu manji od onih na horizontalnom ako je horizontalni rep u ravnini krila ili u blizini te ravnine. Također ni kut klizanja na vertikalnom repu nije jednak kutu klizanja zrakoplova. Zračna

struja iza ravnine elise skrenuta je za neki kut σ , a u strujnoj cijevi koja prolazi kroz krug elise bit će zavojno gibanje. I mlazni motori skreću zračnu struju tako da je kut klizanja iza njega umanjen isto za neku vrijednost. Osim toga zračna struja pri opstrujavanju tijela zrakoplova i kombinacije krilo-tijelo, stvara na njima bočnu silu, a kao reakcija oni skreću struju za neki kut. Taj kut skretanja σ sigurno je utoliko veći ukoliko je veći kut klizanja β , te je on prije svega proporcionalan kutu klizanja, što znači da možemo pisati

$$\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \beta. \quad 4.4$$

U toj jednadžbi usvajamo da je parcijalna diferencijacija neovisna o kutu klizanja. Pomoću te jednadžbe možemo kut klizanja na vertikalnom repu napisati u obliku

$$\beta_v = \beta - \sigma = \beta \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta} \beta. \quad 4.5$$

Prema tome, bočna sila zbog kuta klizanja bit će

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{Y\beta} \beta = -\eta_v \frac{\rho V^2}{2} S_v (C_{N\alpha})_v K_{VB} \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta} \beta$$

pa je njen gradijent

$$C_{Y\beta} = -\eta_v \frac{S_v}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_v K_{VB} \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta}. \quad 4.6$$

Vrlo je teško postaviti neki matematički model koji bi dovoljno točno određivao $\frac{\partial \beta_v}{\partial \beta}$.

Eksperimentalno je određeno usporenje i skretanje uslijed kombinacije tijelo-krilo u ovisnosti o parametru krila s podtrupnim dijelom: vitkosti A'_w , strijele prednjeg ruba A_{LE} i položaja krila na trupu z_w/D_f , kao i o odnosu površina vertikalnog repa skupa sa dijelom pod trupom prema površini krila S'_v/S_w

$$\eta_v \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta} = 0.724 + \frac{3.06 \frac{S'_v}{S_w}}{1 + \cos \Lambda} + 0.4 \frac{z_w}{D_f} + 0.009 A_w. \quad 4.7$$

Gradijent momenta skretanja po kutu klizanja osim momenta skretanja od bočne sile na vertikalnom repu ima i dva sprega: od krila i od tijela

$$C_{n\beta} = (C_{n\beta})_v + (C_{n\beta})_w + (C_{n\beta})_f \quad 4.8$$

Prvi dio gradijenta momenta skretanja zbog kuta klizanja $(C_{n\beta})_v$ jest posljedica momenta normalne sile na vertikalnom repu zbog kuta klizanja β_v . Tu silu smo već odredili

$$Y = Y_V = \eta_V \frac{\rho V^2}{2} S_V (C_{N\alpha})_V K_{VB} \frac{\partial \beta_V}{\partial \beta} \beta .$$

Hvatište ove sile određujemo kao napadnu točku krila od dva polukrila jednaka vertikalnom repu:

$$\ell_{CV} = \ell_{0V} + x_A + c_A \bar{h}_C \quad 4.9$$

Moment skretanja zbog normalne sile na vertikalnom repu je pozitivan:

$$N_V = \eta_V \frac{\rho V^2}{2} S_V (C_{N\alpha})_V K_{VB} \frac{\partial \beta_V}{\partial \beta} \beta (\ell_{CV} - \ell_m) \quad 4.10$$

Dijeljenjem s referentnim veličinama zrakoplova bit će

$$(C_{n\beta})_{VB} = \eta_V \frac{S_V}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_V K_{VB} \frac{\partial \beta_V}{\partial \beta} \frac{\ell_{CV} - \ell_m}{b} = -C_{Y\beta} \frac{\ell_{CV} - \ell_m}{b} . \quad 4.11$$

Aerodinamički koeficijent sprega $(C_{n\beta})_{WB}$ pojavljuje se samo ako krilo ima silu uzgona. Na njega znatno utječe strijela krila. U literaturi [18], za referentne veličine krila s podtrupnim dijelom dana je empirijska formula za ovaj gradijent:

$$(C_{n\beta})_W = \frac{C_L^2}{\pi A} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{tg \Lambda_{1/4}}{(A + 4 \cos \Lambda_{1/4})} \left[\cos \Lambda_{1/4} - \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8 \cos \Lambda_{1/4}} + \frac{6(\bar{x}_{cw} - \bar{x}_m) \sin \Lambda_{1/4}}{A} \right] \right\} \quad 4.12$$

Za veće brzine treba uzeti u obzir i utjecaj stlačivosti zraka, tako što se ova vrijednost množi još s funkcijom

$$\frac{A + 4 \cos \Lambda_{1/4}}{AB + 4 \cos \Lambda_{1/4}} \frac{A^2 B^2 + 4AB \cos \Lambda_{1/4} - 8 \cos^2 \Lambda_{1/4}}{A^2 + 4A \cos \Lambda_{1/4} - 8 \cos^2 \Lambda_{1/4}} ,$$

u kojoj je

$$B = \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \Lambda_{1/4}} .$$

Koeficijent sprega od tijela $(C_{n\beta})_f$ stvara tijelo isto kao i u slučaju momenta propinjanja. Tijelo stvara spreg koji je proporcionalan kutu skretanja $(C_{n\beta})_f \beta$. Taj spreg je posljedica bočne sile na prednjem dijelu tijela koja je u smjeru poprečne brzine opstrujavanja, i bočne sile na zadnjem dijelu koja je u suprotnom smjeru. Te su sile po veličini približno jednake i njihova rezultanta je mala, ali one čine negativan spreg oko osi z koji povećava kut skretanja. Koeficijent tog sprega koji je negativan, može se procijeniti empirijskom jednadžbom

$$(C_{n\beta})_B = -1.3 \frac{V_B D_B}{W_B S_{ref} b} , \quad 4.13$$

u kojoj je V_B volumen tijela, D_B njegova najveća visina, a W_B njegova najveća širina.

4.1.2 Gradijent bočne sile i momenta skretanja od otklona kormila pravca

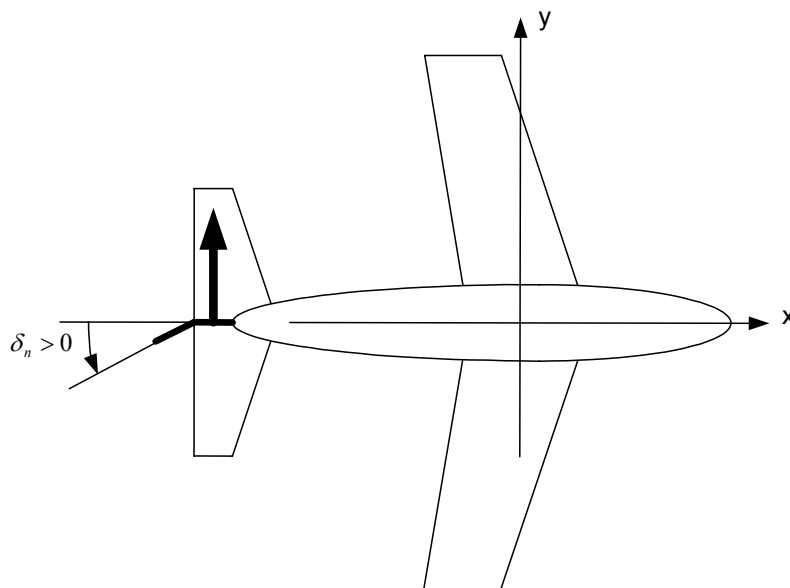
Normalna sila na vertikalnom repu koja je nastala zbog pozitivnog otklona kormila pravca (vidi sliku 4.1) po pravca i smjeru je duž osi y :

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{Y\delta_n} \delta_n = \eta_V \eta_{slot} \frac{\rho V^2}{2} S_V (C_{N\delta})_V \delta_n,$$

odakle je

$$C_{Y\delta_n} = \eta_V \eta_{slot} \frac{S_V}{S_{ref}} (C_{N\delta})_V, \quad 4.14$$

U odjeljku 2.2.7. pokazali smo kako se može odrediti koeficijent $(C_{N\delta})_V$.



Slika 4-1. Normalna sila na vertikalnom repu za pozitivan otklon kormila pravca

Moment skretanja ove sile je negativan za pozitivan otklon δ_n (vidi sliku 3.1)

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{n\delta_n} \delta_n = -\eta_V \eta_{slot} \frac{\rho V^2}{2} S_V (C_{N\delta})_V \delta_n (\ell_{V\delta} - \ell_m)$$

Hvatište ove sile na vertikalnom repu zbog otklona kormila, odredili smo također u odjeljku 2.2.7. Ako je $x_{\delta V}$ udaljenost te točke od srednje aerodinamičke apscise, a x_A udaljenost srednje aerodinamičke apscise od početka repa, treba tom zbroju dodati udaljenost početka

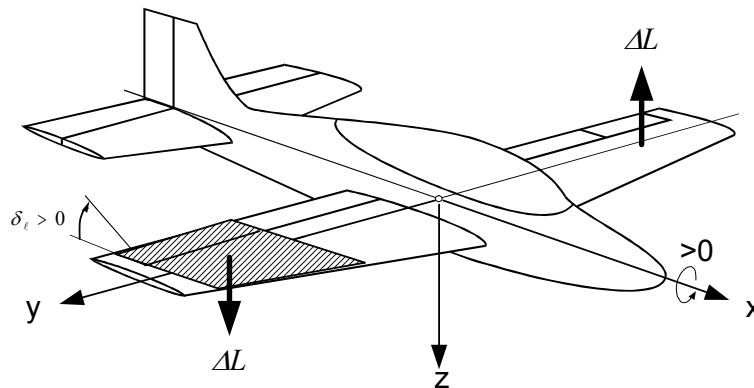
repa od vrha letjelice ℓ_{0V} . Tako dobivamo da je $\ell_{v\delta} = \ell_{0V} + x_A + x_{\delta v}$. Dijeljenjem s referentnim veličinama dobivamo

$$C_{n\delta_n} = -\eta_V \eta_{slot} \frac{S_V}{S_{ref}} (C_{N\delta})_V \frac{\ell_{v\delta} - \ell_m}{b} = -C_{Y\delta_n} \frac{\ell_{v\delta} - \ell_m}{b}. \quad 4.15$$

4.1.3 Gradijent momenta skretanja zbog otklona krilca

Promatrajmo krilo s podtrupnim dijelom. Na lijevom polukrilu na kome je $y < 0$ (vidi sliku 4-2), uzgon $\frac{\rho V^2}{2} S'_W C_L / 2$ je povećan za veličinu ΔL zbog pozitivnog otklona krilca. Na desnom polukrilu na kome je $y > 0$ uzgon je smanjen za tu istu veličinu. Zamislimo kombinaciju krilo-tijelo koja ima oba krilca otklonjena prema dolje kao lijevo krilce stvarne kombinacije i. Koeficijent uzgona takve kombinacije krilo-tijelo je

$$\frac{\frac{\rho V^2}{2} S_W (C_L)_{WB} + 2\Delta L}{\frac{\rho V^2}{2} S_W} = (C_L)_{WB} + \frac{\Delta L}{\frac{\rho V^2}{2} S_W}.$$



Slika 4-2 Dodatna normalna sila zbog otklona krilaca

Koeficijent induciranog otpora na toj kombinaciji je

$$K \left((C_L)_{WB} + \frac{\Delta L}{\frac{\rho V^2}{2} S_W} \right)^2,$$

pa je inducirani otpor na lijevoj polovini te kombinacije

$$\frac{\rho V^2}{2} \frac{S_W}{2} K \left((C_L)_{WB} + \frac{\Delta L}{\frac{\rho V^2}{2} \frac{S_W}{2}} \right)^2.$$

Isto tako nalazimo da je inducirani otpor na desnoj polovici krila na kome je $y > 0$, koje ima krilce otklonjeno prema gore

$$\frac{\rho V^2}{2} \frac{S_W}{2} K \left((C_L)_{WB} - \frac{\Delta L}{\frac{\rho V^2}{2} \frac{S_W}{2}} \right)^2.$$

Vidimo da inducirani otpori na desnoj i lijevoj strani krila nisu isti. Posljedica je moment skretanja. Hvatište tih sila je na udaljenosti y_c od osi zrakoplova, a to je hvatište normalne sile polukrila s podtrupnim dijelom. Lijevo polukrilo imat će negativni moment skretanja, a desno pozitivni:

$$N = \frac{\rho V^2}{2} \frac{S_W}{2} K \left[- \left((C_L)_{WB} + \frac{\Delta L}{\frac{\rho V^2}{2} \frac{S_W}{2}} \right)^2 + \left((C_L)_{WB} - \frac{\Delta L}{\frac{\rho V^2}{2} \frac{S_W}{2}} \right)^2 \right] y_c,$$

ili

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{n\delta_\ell} \delta_\ell = -4K(C_L)_{WB} \Delta L y_c.$$

Označimo sa y_ℓ udaljenost hvatišta sile ΔL od osi letjelice. Onda je moment valjanja zbog otklonjenih krilaca

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{\ell\delta_\ell} \delta_\ell = 2\Delta L y_\ell,$$

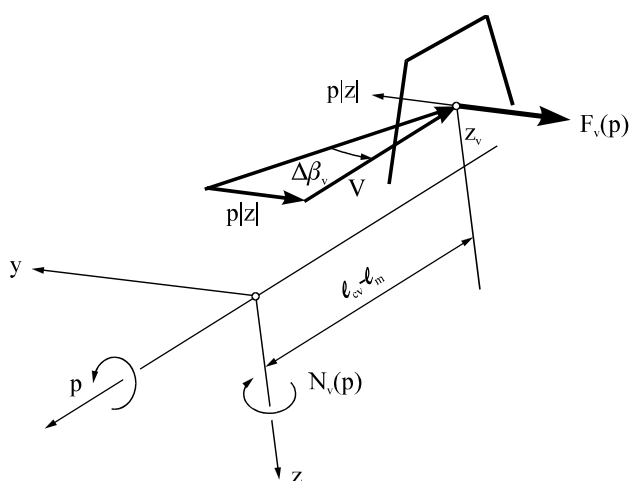
Dijeljenjem ovih dviju jednažbi dobivamo

$$C_{n\delta_\ell} = -2K(C_L)_{WB} C_{\ell\delta_\ell} \frac{y_c}{y_\ell}. \quad 4.16$$

Udaljenost y_c od ose zrakoplova napadne točke normalne sile polu-krila određujemo pomoću dijagrama na slici 2-12, a y_ℓ je udaljenost od osi zrakoplova do napadne točke normalne sile krilca ΔL . Tu napadnu točku možemo uzeti na polovini raspona krilca.

4.1.4 Bočna sila i moment skretanja zbog kutne brzine valjanja

Na slici 4-3 vidimo da zbog kutne brzine valjanja aerodinamičko središte vertikalnog repa dobiva brzinu $p|z_{cv}|$ u pravcu i smjeru osi y . Učinak je isti ako vertikalni rep stoji a zrak ima brzinu $p|z_{cv}|$ u suprotnom smjeru osi y . Ta brzina mijenja pravac brzine opstrujavanja tako što se na vertikalnom repu dobije pozitivan dopunski kut klizanja $\Delta\beta_v = \frac{p|z_c|}{V}$. Usvojili smo apsolutnu vrijednost udaljenosti aerodinamičkog središta vertikalnog repa $|z_c|$ od osi zrakoplova, kako predznak ne bi utjecao na smjer sile i momenta koji su posljedica ovog kuta.



Slika 4-3. Vertikalni rep pri kutnoj brzini valjanja

Sila na vertikalnom repu koja se javlja zbog $\Delta\beta_v$ jest negativna bočna sila zrakoplova zbog kutne brzine valjanja:

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{yp} \frac{pb}{V} = -\eta_v \frac{\rho V^2}{2} S_v (C_{N\alpha})_v \frac{p|z_{cv}|}{V},$$

odakle je

$$C_{yp} = -\eta_v \frac{S_v}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_v \frac{|z_{cv}|}{b}. \quad 4.17$$

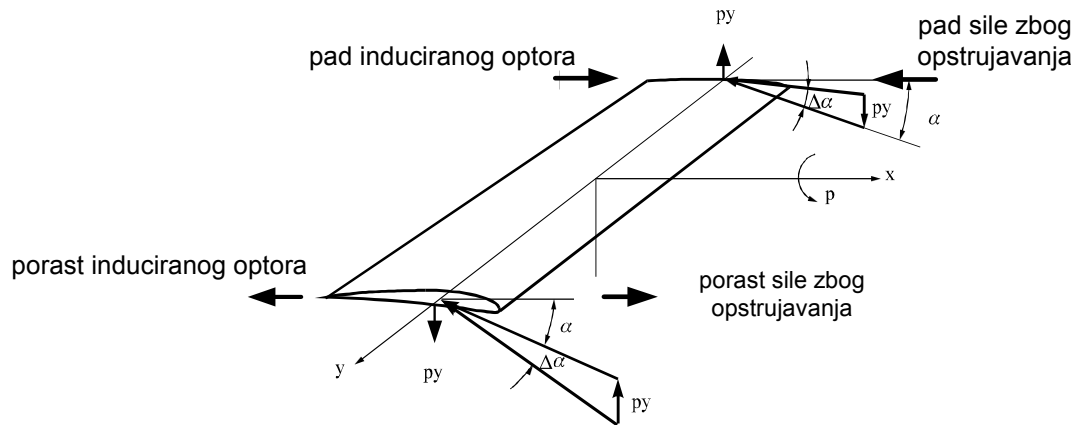
Moment skretanja zbog kutne brzine valjanja ima dva dijela. Prvi je dio moment bočne sile na vertikalnom repu, a drugi je spreg skretanja koji se stvara na krilu zbog kutne brzine valjanja krila.

Moment skretanja od bočne sile na vertikalnom repu je pozitivan.

$$\eta_v \frac{\rho V^2}{2} S_v (C_{N\alpha})_v \frac{p|z_{cv}|}{V} (\ell_{cv} - \ell)$$

Zbog pozitivne kutne brzine valjanja na desnoj polovici krila, točke krila imaju brzinu prema dolje py , a to je isto kao da zrak na desnoj strani krila ide prema gore. Ta dopunska brzina zraka prema gore na desnoj polovici krila stvara dodani napadni kut $\Delta\alpha = \frac{py}{V}$, koji raste linearno po rasponu krila. Na lijevoj strani krila također je takav ali negativan dopunski napadni kut.

Ako napadni kut krila bio pozitivan, onda je na desnoj strani on povećan pa zato je desnoj strani krila povećan a na lijevoj strani smanjen inducirani otpor. Rezultanta tih promjena inducirano otpora bit će praktično nula, ali one daju pozitivan spreg oko osi z . Povećani napadni kut izazvat će veću silu u pravcu gibanja krila zbog opstrujavanja prednjeg ruba na desnoj strani krila, dok će smanjeni napadni kut na lijevoj strani smanjiti tu silu. Opet će rezultanta tih promjena praktično biti nula, ali te promjene sila stvaraju negativan spreg.



Slika 4-4. Spreg induciranih sila otpora i aksijalnih sisajućih sila

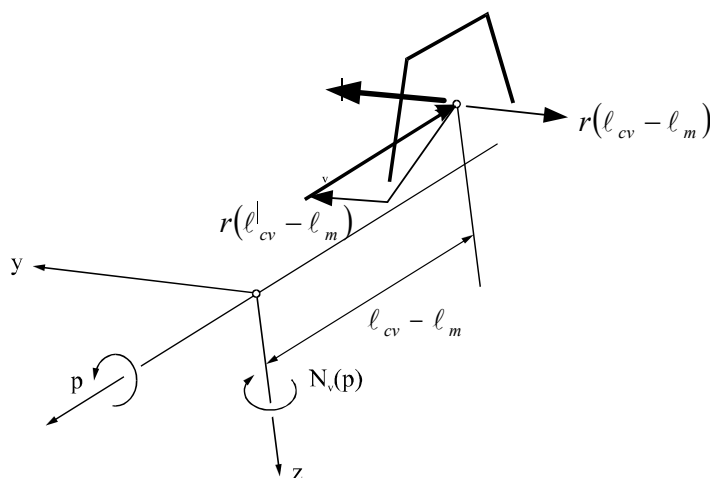
Razlika između ta dva sprega je mala u odnosu na moment koji stvara vertikalni rep zbog kutne brzine valjanja, pa je zato moment skretanja zrakoplova zbog kutne brzine valjanja uglavnom moment skretanja od bočne sile na vertikalnom repu zbog kutne brzine valjanja:

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{np} \frac{pb}{V} = \eta_v \frac{\rho V^2}{2} S_v (C_{N\alpha})_v \frac{p|z_{cv}|}{V} (\ell_{cv} - \ell)$$

$$C_{np} = \eta_v \frac{S_v}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_v \frac{|z_{cv}|}{b} \frac{\ell_{cv} - \ell_m}{b} = -C_{Yp} \frac{\ell_{cv} - \ell_m}{b} \quad 4.18$$

4.1.5 Bočna sila i moment skretanja zbog kutne brzine skretanja

Slično kao u prethodnom odjeljku, zbog kutne brzine skretanja r oko osi z aerodinamičko središte vertikalnog repa ima brzinu $r(\ell_{cv} - \ell_m)$ u pravcu osi y , ali u suprotnom smjeru. Tu brzinu aerodinamičkog središta vertikalnog repa možemo zamijeniti sa suprotnom brzinom zraka.



Slika 4-5. Vertikalni rep pri kutnoj brzini skretanja

Na slici 4-5 vidimo da vektorski zbroj te dodate brzine zraka $r(\ell_{cv} - \ell_m)$ i brzine dolazeće zračne struje V , daju negativni kut klizanja na vertikalnom repu. Taj kut klizanja stvara pozitivnu bočnu silu zrakoplova:

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{Yr} \frac{rb}{V} = \eta_v \frac{\rho V^2}{2} S_v (C_{N\alpha})_v \frac{r(\ell_{cv} - \ell_m)}{V}$$

te je

$$C_{Yr} = \eta_v \frac{S_v}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_v \frac{\ell_{cv} - \ell_m}{b} \quad 4.19$$

Moment oko osi z od te sile je negativan, a to je moment skretanja zrakoplova zbog kutne brzine skretanja

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{nr} \frac{rb}{V} = -\eta_v \frac{\rho V^2}{2} S_v (C_{N\alpha})_v \frac{r(\ell_{cv} - \ell_m)^2}{V}$$

te je gradijent koeficijenta momenta skretanja

$$C_{nr} = -\eta_V \frac{S_v}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_v \frac{(\ell_{cv} - \ell_m)^2}{b^2} = -C_{Yr} \frac{\ell_{cv} - \ell_m}{b}. \quad 4.20$$

4.2 Moment valjanja

Koeficijent momenta valjanja određujemo tako da moment valjanja bude izražen jednadžbom

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_\ell. \quad 4.21$$

Taj aerodinamički koeficijent kao što smo to na početku ovog odjeljka pokazali, za zrakoplovne konfiguracije ovisi o parametrima $\beta, p, r, \delta_\ell, \delta_n$. Ta funkcija se može linearizirati

$$C_\ell(\beta, p^*, r^*, \delta_\ell, \delta_n) = C_{\ell\beta} \beta + C_{\ell p} \frac{pb}{V} + C_{\ell r} \frac{rb}{V} + C_{\ell\delta_\ell} \delta_\ell + C_{\ell\delta_n} \delta_n, \quad 4.22$$

što nam omogućuje da svaki derivativ posebno analiziramo. Ta analiza ima dvostruku ulogu. S jedne strane na temelju nje procjenjujemo vrijednosti derivativa, a s druge strane upoznajemo se s fizičkom slikom, na temelju koje uočavamo ulogu krila, horizontalnog i vertikalnog repa u momentu valjanja. Točniju procjenu ovih derivativa možemo naći u lit.[28] i [29].

4.2.1 Gradijent po kutu klizanja

Moment valjanja zrakoplova zbog kuta klizanja $C_{\ell\beta}$ stvara krilo i vertikalni rep.

$$C_{\ell\beta} = (C_{\ell\beta})_W + (C_{\ell\beta})_V \quad 4.23$$

4.2.1.1 Od krila $(C_{\ell\beta})_W$

Gradijent momenta valjanja po kutu klizanja koje stvara krilo $(C_{\ell\beta})_W$ ima tri komponente

$$(C_{\ell\beta})_W = (C_{\ell\beta v})_W + (C_{\ell\beta C_L} C_L)_W + (C_{\ell\beta z} \bar{z}_W)_W; \quad 4.24$$

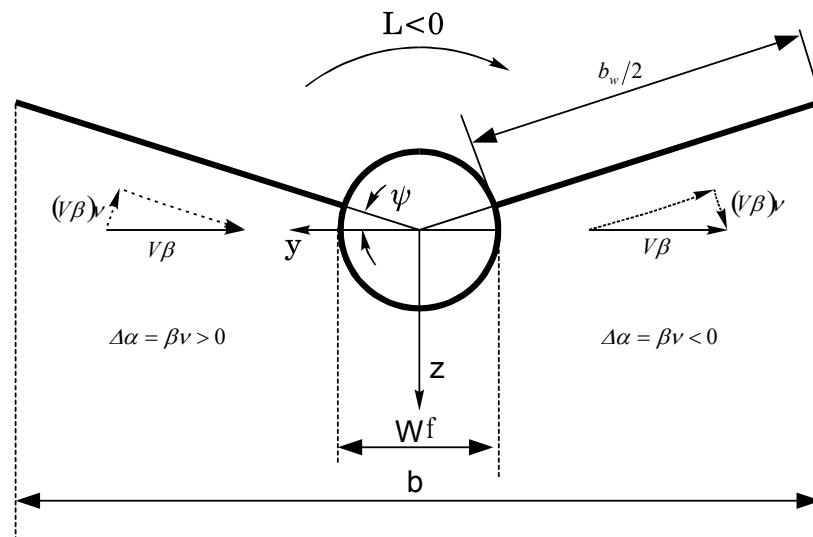
$(C_{\ell\beta v})_W$ komponenta zbog prostornog kuta v krila,

$(C_{\ell\beta C_L} C_L)_W$ komponenta zbog istodobnog postojanja normalne sile na krilu i kuta klizanja,

$(C_{\ell\beta z} \bar{z}_W)_W$ komponenta zbog nesimetrično postavljenog krila na tijelu.

Utjecaj prostornog kuta krila $(C_{\ell\beta v})_W$

Od ova tri faktora najveći utjecaj na moment valjanja krila ima kut ν (kut koji čini krilo u odnosu na koordinatnu ravninu xy). Zbog tog kuta, kao što se vidi sa slike 4-6, poprečna brzina $V \sin \beta \approx V\beta$ razlaže se na komponentu okomitu na ravninu krila $V\beta \sin \nu \approx V\beta\nu$ i drugu komponentu u ravnini krila (na drugoj polovici krila ta okomita komponenta $V\beta\nu$ ima suprotan smjer). Okomita komponenta brzine podijeljena s brzinom $V \cos \beta \approx V$ stvara napadni kut $\beta\nu$ na desnoj polovici krila ($y > 0$) i isti takav ali negativan $-\beta\nu$ na lijevoj polovici krila ($y < 0$).



Slika 4-6. Utjecaj kuta klizanja na krilo s kutom ν

Tom napadnom kutu na desnoj polovici krila odgovara normalna sila

$$\frac{1}{2} \frac{\rho V^2}{2} S_w (C_{N\alpha})_w \beta \nu,$$

čije je hvatište na udaljenosti y_{CW} od ose zrakoplova. Ista je tolika sila samo suprotnog smjera pojavljuje se na desnoj polovici krila, te one skupa čine spreg oko x osi negativnog smjera:

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{l\beta\nu} \beta \nu = -2 \frac{\frac{\rho V^2}{2} S_w (C_{N\alpha})_w \beta \nu}{2} y_{CW},$$

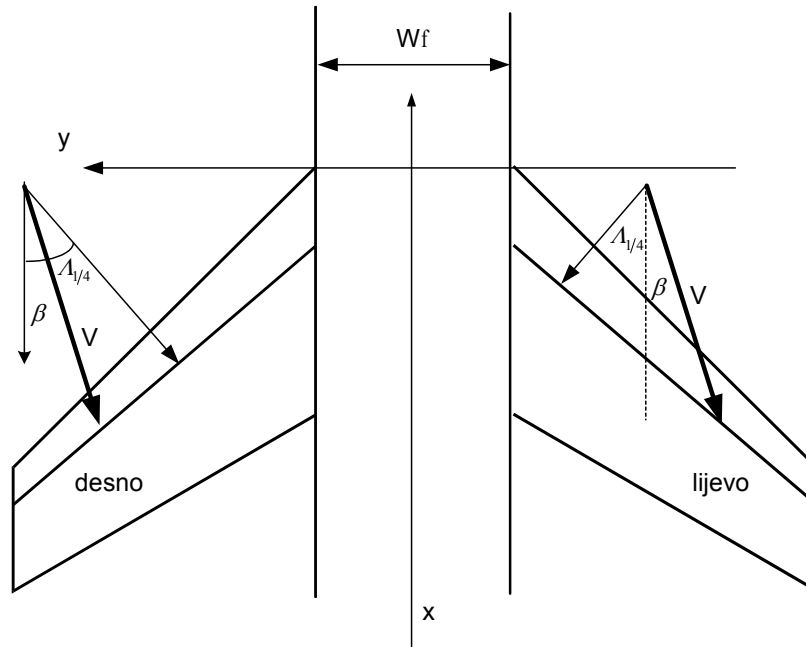
Dijeljenjem sa referentnim momentom $q_\infty S_{ref} b$ i skraćivanjem sa $\beta \nu$ dobivamo

$$C_{l\beta\nu} = -\frac{S_w}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_w \frac{y_{CW}}{b}, \quad 4.25$$

Pomoću dijagrama na slici 2-12 možemo odrediti položaj napadne točke polu-krila u ovisnosti o parametru krila. Toj vrijednosti treba dodati pola širine trupa na mjestu krila.

Utjecaj preko normalne sile $C_{\ell\beta C_L}$

Drugi uzrok pojave momenta valjanja na krilu jest nesimetrija opstrujavanja dviju polovica strelastog krila. Nazovimo, kao u prethodnom slučaju, desno polukrilo ono na kome su koordinate y pozitivne, a lijevo polukrilo gdje je $y < 0$ (kao na slici 4-7 gledano u vrh osi z).



Slika 4-7. Nesimetrija opstrujavanja strelastog krila pri postojanju kuta klizanja

Prva posljedica ove nesimetrije je razlika u komponenti brzine okomite na glavni vrtlog. Na desnom polukrilu ta komponenta je $V \cos(\alpha_{1/4} - \beta)$, a na lijevom ona je $V \cos(\alpha_{1/4} + \beta)$. Zbog toga će biti različiti dinamički tlak u struji okomitoj na glavni vrtlog lijevog i desnog polukrila.

Druga posljedica nesimetrije su različiti napadni kutovi u presjecima lijevog i desnog polu-krila okomitim na glavni vrtlog. Na desnom polukrilu je napadni kut

$$\frac{V \sin \alpha}{V \cos(\alpha_{1/4} - \beta)},$$

a na lijevom

$$\frac{V \sin \alpha}{V \cos(\alpha_{1/4} + \beta)}.$$

Zato će se pojaviti različiti momenti valjanja na desnom i na lijevom polu krilu

$$L_{desno} = -\frac{\rho}{2} [V \cos(\Lambda_{1/4} - \beta)]^2 \frac{S_w}{2} (C_{N\alpha})_w k_{WB} \frac{\alpha}{\cos(\Lambda_{1/4} - \beta)} y_{CW}$$

$$L_{lijevo} = \frac{\rho}{2} [V \cos(\Lambda_{1/4} + \beta)]^2 \frac{S_w}{2} (C_{N\alpha})_w k_{WB} \frac{\alpha}{\cos(\Lambda_{1/4} + \beta)} y_{CW}$$

a rezultirajući moment valjanja bit će zbroj tih dvaju momenata:

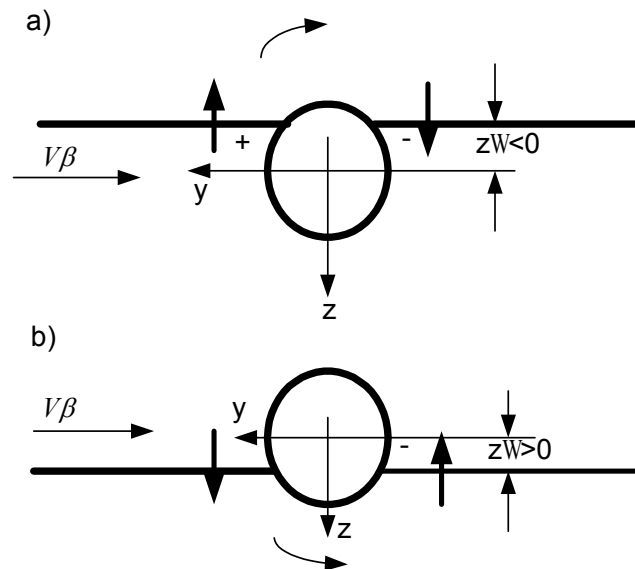
$$\begin{aligned} \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{\ell\beta C_L} \beta C_L &= L_{desno} + L_{lijevo} \\ &= \frac{\rho V^2}{2} [-\cos(\Lambda_{1/4} - \beta) + \cos(\Lambda_{1/4} + \beta)] \frac{S_w}{2} (C_{N\alpha})_w k_{WB} \alpha y_{CW} \\ &= -\frac{\rho V^2}{2} \cdot 2\beta \sin \Lambda_{1/4} \cdot \frac{S_w}{2} (C_{N\alpha})_w k_{WB} \alpha y_{CW} \end{aligned}$$

Dijeljenjem s referentnim veličinama za moment valjanja i ijednašavanjem $C_L = (C_{N\alpha})_w \alpha$,

dobivamo

$$C_{\ell\beta C_L} = -\frac{S_w}{S_{ref}} \sin \Lambda_{1/4} k_{WB} \frac{y_{CW}}{b} \quad 4.26$$

Podsjetimo se da položaj napadne točke polukrila u ovisnosti o parametrima krila određuje pomoću dijagrama na slici 2-12.



Slika 4-8. a) visoko-krilac, b) nisko-krilac

Utjecaj zbog nesimetrično postavljenoog krila $C_{\ell\beta}(\bar{z}_w)$

Treća komponenta momenta valjanja je zbog nesimetrično postavljenih krila. Ako su krila postavljena na donjem dijelu tijela (niskokrilac, slika 4-8-b), onda povećani tlak na spoju krila i trupa zbog poprečne brzine $V\beta$ stvara pozitivni moment valjanja, i obrnuto, ako je krilo postavljeno na gornjem dijelu tijela (visokokrilac kao na slika 4-7-a), onda povećani tlak na spoju krila i trupa stvara negativni moment valjanja. Na temelju mjerenja napravljena je empirijska formula

$$C_{\ell\beta}(\bar{z}_w) = 1.2\sqrt{A} \frac{D_f + W_f}{b} \bar{z}_w. \quad 4.27$$

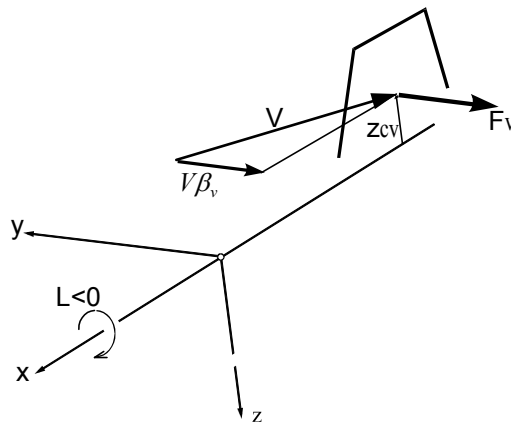
D_f i W_f su visina i širina tijela na mjestu gdje je postavljeno krilo, a \bar{z}_w je visina korijene tetive u koordinatnom sustavu letjelice (pozitivna prema dolje) podijeljena s referentnom duljinom b .

4.2.1.2 Od vertikalnog repa $(C_{\ell\beta})_V$

Moment valjanja koji se stvara na vertikalnom repu zbog kuta klizanja $(C_{\ell\beta})_V \beta$ jest posljedica normalne sile na vertikalnom repu (vidi sliku 4-9). Ta sila je

$$F_V = -\eta_V \frac{\rho V^2}{2} S'_V (C_{N\alpha})_V \beta_V. \quad 4.28$$

Hvatište te sile određeno je kao napadna točka polunoseće površine u odjeljku 2.25. Udaljenost $|z_{CV}|$ od napadne točke vertikalnog repa do osi x je zbroj udaljenosti od napadne točke do korijenske tetive i udaljenosti od korijenske tetive i do osi x letjelice:



Slika 4-9. Moment valjanja od vertikalnog repa

Služimo se apsolutnim vrijednostima da ne bi smo pogriješili u predznaku. Osim usporenja struje, zbog čega smanjujemo dinamički tlak na repu η_V , mijenja se i pravac zraka $\beta_v < \beta$. Zato umanjujemo kut klizanja na vertikalnom repu za kut σ , kao što je objašnjeno u odjeljku 4.1.1, te je

$$\beta_v = \beta - \sigma = \beta \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) = \beta \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta}.$$

S obzirom na tako određeni kut klizanja normalna sila na vertikalnom repu je

$$F_V = -\eta_V \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta} \frac{\rho V^2}{2} S'_V (C_{N\alpha})_V \beta, \quad 4.29$$

a njen moment valjanja za os x je negativan:

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b (C_{l\beta})_V \beta = -\eta_V \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta} \frac{\rho V^2}{2} S'_V (C_{N\alpha})_V \beta |z_{CV}|$$

Dijeljenjem s referentnim veličinama i kutom klizanja dobit ćemo traženi koeficijent

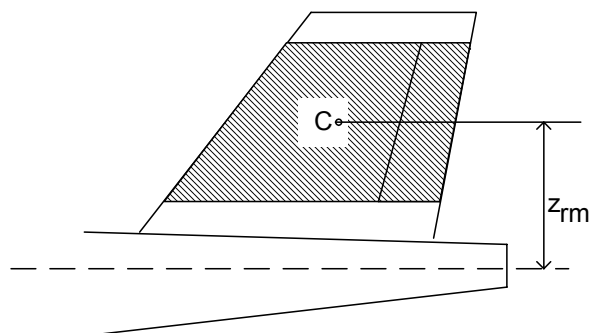
$$(C_{l\beta})_V = -\eta_V \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta} \frac{S'_V}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_V \frac{|z_{CV}|}{b}. \quad 4.30$$

U poglavlju 4.1.1 dana je empirijska formula za određivanje produkta $\eta_V \frac{\partial \beta_v}{\partial \beta}$ za slučaj skretanja struje izazvano elisom.

4.2.2 Gradijent po otklonu kormila pravca

Otklon kormila pravca na vertikalnom repu stvara normalnu silu na njemu

$$F_V = \eta_V \eta_{slot} \frac{\rho V^2}{2} S_V (C_{N\delta})_V \delta_n \quad 4.31$$



Slika 4-10. Površina S_δ i napadna točka u središtu te površine

koja je okomita na vertikalni rep. Ako je otklon pozitivan (kao na slici 4-9), ta sila je u pravcu i smjeru osi y . Gradijent $(C_{N\delta})_V$ na vertikalnom repu procjenjujemo kako je opisano u odjeljku 2.2.7. Možemo uzeti da je napadna točka ove sile na polovici raspona kormila pravca. Označimo sa $|z_{rm}|$ udaljenost te točke od osi x . Moment valjanja zrakoplova ove sile, za pozitivan otklon, jest pozitivan.

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{\ell\delta_n} \delta_n = \eta_V \eta_{slot} \frac{\rho V^2}{2} S_V (C_{N\delta})_V \delta_n |z_{rm}|$$

Dijeljenjem s referentnim veličinama i otklonom kormila pravca dobivamo

$$C_{\ell\delta_n} = \eta_V \frac{S_V}{S_{ref}} (C_{N\delta})_V \frac{|z_{rm}|}{b}. \quad 4.32$$

Ovaj gradijent je znatno manji u odnosu na druge gradijente $C_{\ell\beta}$ i $C_{\ell\delta_\epsilon}$ te se zato ponekad zanemaruje.

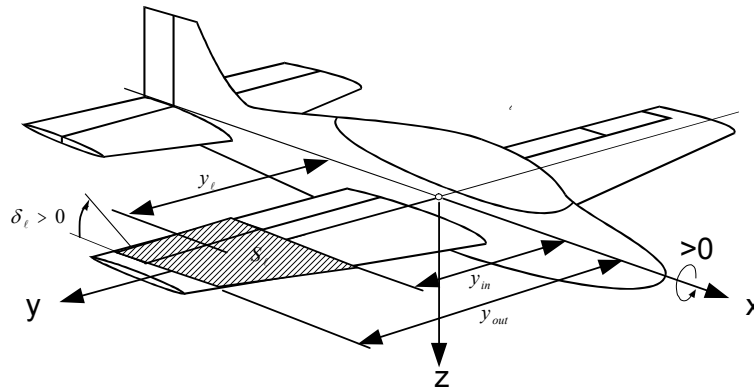
4.2.3 Gradijent po otklonu krilaca

Moment valjanja koji stvaraju krilca najbolje ćemo odrediti ako na dijelu krila na kome se ona nalaze, promatramo element površine $dS = c dy$ udaljen y od osi x . Moment valjanja od jednog elementa je

$$dL = y \frac{\rho V^2}{2} dS c_{\ell\delta} K_f \delta_\ell \cos \Lambda_{HL}.$$

Svi elementi imaju isti otklon $\delta_\ell \cos \Lambda_{HL}$, te prema tome i isti koeficijent nelinearnosti K_f . Integracijom od unutrašnje udaljenosti krilca y_{in} do vanjske udaljenosti y_{out} (slika 4.11) dobivamo ukupni moment valjanja jednog krilca. Za par krilaca moment je dva puta veći:

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{\ell\delta_\epsilon} \delta_\ell = 2 \frac{\rho V^2}{2} K_f \delta_\ell \cos \Lambda_{HL} \int_{y_{in}}^{y_{out}} c_{\ell\delta} y c(y) dy$$



Slika 4-11.

Dijeljenjem s referentnim momentom i otklonom krilaca, dobivamo gradijent momenta valjanja zbog otklona krilca:

$$C_{\ell\delta_l} = \frac{2K_f \cos A_{HL} \int_{y_{in}}^{y_{out}} c_{\ell\delta} y c(y) dy}{S_{ref} b}. \quad 4.33$$

Postoji li između krila i krilaca zazor, treba uzeti u obzir gubitke reda veličine i do 20%. $c_{\ell\delta}$ je gradijent profila u presjeku y , a $C_{N\delta}$ je gradijent krila zbog otklona krilaca. Sa S_e označimo dio površine polukrila na kome se nalazi krilce, a sa y_e udaljenost središta te površine od osi zrakoplova kao na slici 4-11. Možemo uzeti da je

$$\int_{y_{in}}^{y_{out}} c_{\ell\delta} y c(y) dy = C_{N\delta} y_e S_e,$$

pa je konačno

$$C_{\ell\delta_l} = 2\eta_{slot} \frac{S_e}{S_{ref}} \frac{y_e}{b} C_{N\delta} K_f \cos A_{HL}. \quad 4.34$$

4.2.4 Gradijent po kutnoj brzini valjanja

$C_{\ell p} p^*$ je koeficijent momenta prigušenja valjanja letjelice. Bezdimenzijska brzina valjanja je $\frac{pb}{V}$. Derivativ $C_{\ell p}$ stvaraju krilo, horizontalni i vertikalni rep, a udio tijela se zanemaruje:

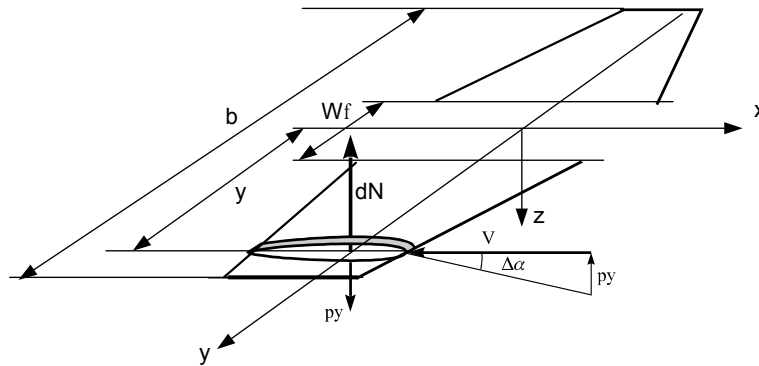
$$C_{\ell p} = (C_{\ell p})_{WB} + (C_{\ell p})_{hB} + (C_{\ell p})_{VB} \quad 4.35$$

Najveći dio ovog derivativa stvara krilo, pa možemo reći s malom pogreškom da je

$$C_{\ell p} = (C_{\ell p})_{WB}. \quad 4.36$$

Prigušenje valjanja od krila $(C_{\ell p})_W$

Kombinacija krilo-tijelo ima raspon b , samo krilo (od dva polukrila) ima raspon b_w , a W_f je širina tijela na mjestu kombinacije. Neka se kombinacija krilo-tijelo valja oko osi x koordinatnog sustava letjelice. Uočimo jedan element krila na desnom polukrilu, širine dy na udaljenosti y od osi x . Zbog kutne brzine p taj element ima brzinu py prema dolje. Opstrujavanje tog elementa je isto ako on nema tu brzinu prema dolje, već zrak ima brzinu py prema gore. To znači da možemo kombinaciju krilo-tijelo koje se vrti kutnom brzinom p oko osi x , zamijeniti s kombinacijom koja se ne vrti ali je opstrujavana zrakom koji osim aerodinamičke brzine ima kutnu brzinu $-p$, suprotnog smjera od kutne brzine letjelice. U tom drugom slučaju, u presjeku y zrak ima vertikalnu brzinu py prema gore (za y negativno brzina je na dolje). Vektorski zbroj aerodinamičke brzine i brzine vrtnje zraka daju rezultantu koja ima napadni kut u presjeku y kao na slici 4-12.



Slika 4-12. Kombinacija krilo-tijelo u valjanju

$$\Delta\alpha = \arctg \frac{py}{V} \approx \frac{p}{V} y$$

Zbog tog kuta na element površine krila, $dS = c(y)dy$, djeluje elementarna normalna sila

$$dN = \frac{\rho V^2}{2} dS c_{l\alpha} \frac{p}{V} y;$$

$c_{l\alpha}$ je gradijent profila tog elementa u presjeku y . Ta elementarna sila stvara negativni elementarni elementarni moment valjanja

$$dL = -dN y = -\frac{\rho V^2}{2} c_{l\alpha} \frac{p}{V} y^2 dS.$$

Ukupni moment valjanja dobivamo integracijom po rasponu od korijenske do vršne tetive. Korijenska tetiva je na udaljenosti $W_f/2$ od osi x , a vršna tetiva je na udaljenosti $b/2$. Druga polovica krila stvara isti takav moment jer je slika anti-simetrična, pa je zato ukupni moment valjanja

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{lp} \frac{pb}{V} = -2 \int_{W_f/2}^{b/2} \frac{\rho V^2}{2} c_{l\delta} \frac{p}{V} y^2 dS,$$

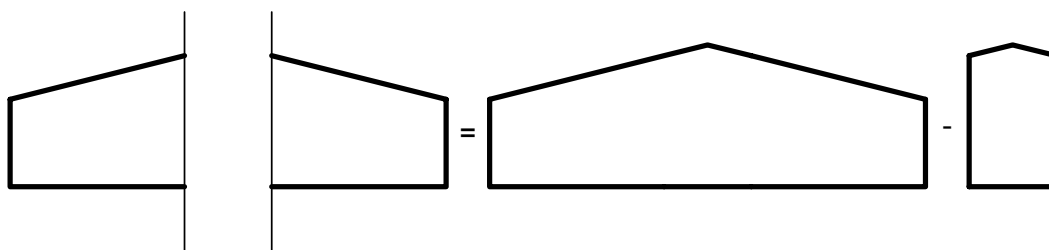
ili kraćenjem istih veličina na lijevoj i desnoj strani jednadžbe, dobivamo

$$C_{lp} = -\frac{2}{S_{ref} b^2} \int_{W_f/2}^{b/2} c_{l\alpha} y^2 dS \quad 4.37$$

Integral na desnoj strani može se napisati kao razlika dvaju integrala

$$2 \int_{W_f/2}^{b/2} c_{l\alpha} y^2 dS = 2 \int_0^{b/2} c_{l\alpha} y^2 dS - 2 \int_0^{W_f/2} c_{l\alpha} y^2 dS,$$

kao što je to prikazano na slici 4-13.



Slika 4-13. Područje kombinacije = područje krila raspona b - područje krila raspona w_f

$$C_{lp} = -\frac{1}{S_{ref} b^2} \left[2 \int_0^{b/2} c_{l\alpha} y^2 dS - 2 \int_0^{W_f/2} c_{l\alpha} y^2 dS \right]. \quad 4.38$$

Bezdimenzionalna veličina

$$\frac{2}{S_{ref} b^2} \int_0^{b/2} c_{l\alpha} y^2 dS = (C_{N\alpha})_W f(\lambda, A_m, A\beta). \quad 4.39$$

izračunata je u subsonici pomoću teorije vrtloga a u supersonici pomoću linearne teorije krila. Detaljno izvođenje je problem teorijske aerodinamike, pa se nećemo na njemu zadržavati. Funkcija $f(\lambda, A_m, A\beta)$ predočena je na slici 4.13 prema [13]. Parametri funkcije su

$$A_m = A \tan A_m$$

$$Ma < 1 \Rightarrow A\beta = -A\sqrt{Ma^2 - 1}$$

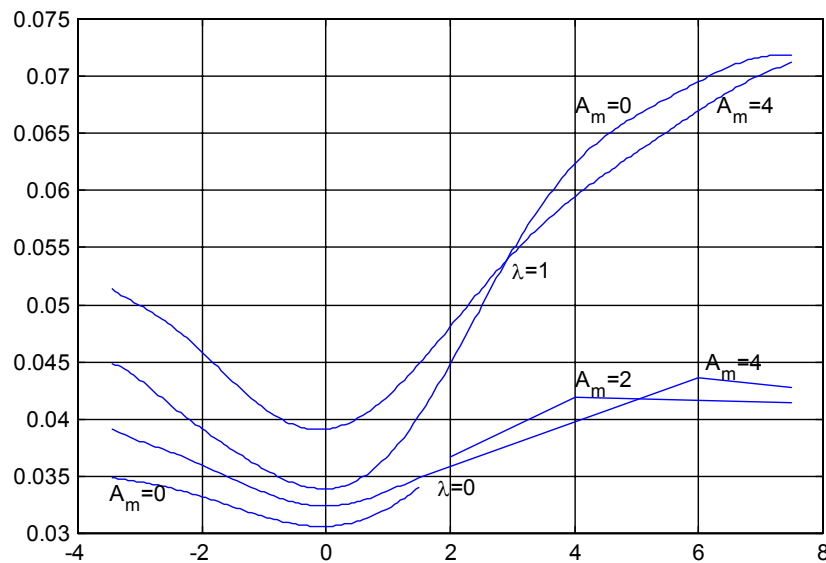
$$Ma > 1 \Rightarrow A\beta = A\sqrt{Ma^2 - 1}$$

Zamjenom u jednadžbu za gradijent valjanja zrakoplova po kutnoj brzini valjanja dobivamo

$$C_{lp} = -\frac{1}{b^2 S_{ref}} \left\{ \left[S b^2 C_{N\alpha} f(\lambda, A_m, A\beta) \right]_b - \left[S W_f^2 C_{N\alpha} f(\lambda, A_m, A\beta) \right]_{W_f} \right\}. \quad 4.40$$

U vitičastoj zagradi prvo izračunamo produkt $S b^2 C_{N\alpha} f$ za krilo s podtrupnim dijelom (raspona b), a zatim od njega oduzmemo taj isti produkt za krilo pod trupom (krilo raspona W_f). Ovaj drugi produkt obično je mali i s obzirom na točnost cijele teorije obično se zanemaruje. U tom slučaju ako je referentna površina jednaka krilu raspona b onda je

$$(C_{lp})_W = (C_{N\alpha})_W f(\lambda, A_m, A\beta). \quad 4.41$$



Slika 4-14. $f(\lambda, A_m, A\beta)$

4.2.5 Gradijent po kutnoj brzini skretanja

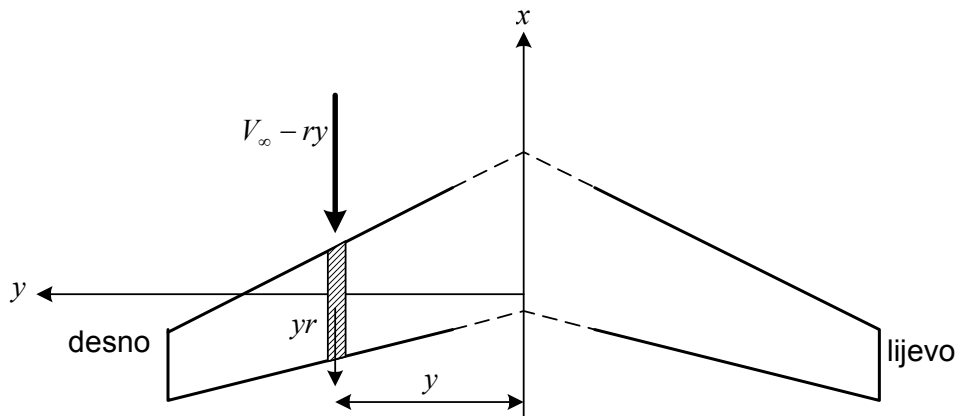
Moment valjanja zbog kutne brzine skretanja stvara krilo i vertikalni rep

$$C_{lr} = (C_{lr})_W + (C_{lr})_V. \quad 4.42$$

Utjecaj krila $(C_{lr})_W$

Razmotrimo prvo mehanizam stvaranja momenta valjanja na krilo kada postoji kutna brzina skretanja. Uočimo jedan element krila dS (šrafirana površina na slici 4-15) koji je udaljen od osi letjelice y . Zbog kutne brzine skretanja r , taj element dobiva brzinu yr unatrag, što je isto kao da on stoji a da se brzina zraka smanji za tu istu veličinu. To znači da svaki element desne polovice krila ima umanjenu brzinu opstrujavanja $V_\infty - ry$. Suprotno tomu, s lijeve strane isti takav element imat će povećanu brzinu $V_\infty + r|y|$. Upotrijebili smo apsolutnu vrijednost kako ne bismo pogriješili zbog promjene predznaka s desne na lijevu polovicu krila. Element s desne strane polukrila ima elementarnu normalnu silu

$$dN_{desno} = \frac{\rho(V_\infty - ry)^2}{2} dS c_\ell,$$



Slika 4-15 Krilo s kutnom brzinom skretanja r

gdje je c_ℓ koeficijent uzgona profila u presjeku y . Ta elementarna normalna sila stvara elementarni moment valjanja

$$dL_{desno} = \frac{\rho(V_\infty - ry)^2}{2} dS c_\ell y.$$

Na lijevoj strani, na simetričnom elementu imamo elementarnu normalnu silu

$$dN_{lijevo} = \frac{\rho(V_\infty + r|y|)^2}{2} dS c_\ell$$

i njen moment

$$dL_{lijevo} = \frac{\rho(V_\infty + r|y|)^2}{2} dS c_\ell |y|.$$

Elementarni momenti od desnog polukrila su negativni, a od lijevoga su pozitivni. Ukupni moment valjanja od oba polukrila bit će

$$L_{desno} - L_{lijevo} = - \int_0^{b/2} \frac{\rho(V_\infty - ry)^2}{2} dS c_\ell |y| + \int_0^{b/2} \frac{\rho(V_\infty + r|y|)^2}{2} dS c_\ell |y|,$$

ili

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b (C_{\ell r})_W \frac{rb}{V} = \frac{\rho}{2} \int_0^{b/2} 4V \cdot ry c_\ell y dS.$$

Kraćenjem dobivamo

$$(C_{\ell r})_W = \frac{1}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 S_{ref}} \int_0^{b/2} c_\ell y^2 dS. \quad 4.43$$

Da bismo procijenili vrijednost ovog integrala, zamijenimo zadano krilo ekvivalentnim krilom pravokutnog oblika. Neka je tetiva tog krila c_A , raspon b_A i konstantan koeficijent uzgona profila. Onda je taj integral jednak vrijednosti

$$\int_0^{b/2} c_\ell y^2 dS = c_\ell \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^3 c_A = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \frac{1}{6} c_\ell b c_A. \quad 4.44$$

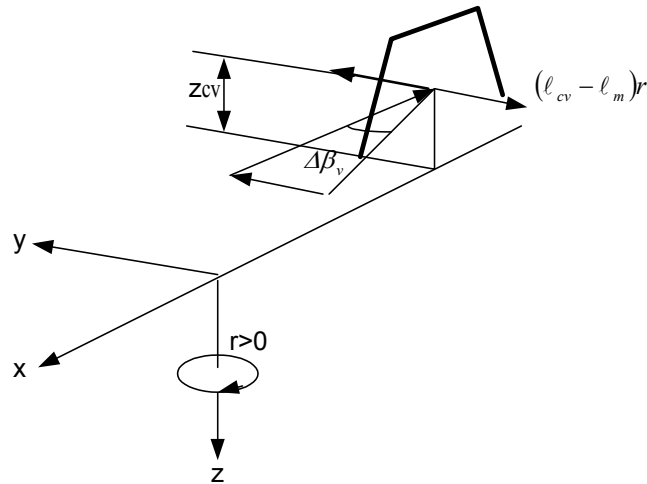
Za takvo krilo produkt $b c_A$ je njegova površina, a pomnožena s koeficijentom uzgona profila približno je uzgon tog krila, te je konačno

$$(C_{\ell r})_W = \frac{1}{6} (C_N)_W, \quad 4.45$$

gdje je C_N normalna sila krila s podtrupnim dijelom.

Utjecaj repa $(C_{\ell r})_V$

Zbog kutne brzine r oko osi z tromosti letjelice, vertikalni rep ima brzinu $(\ell_{cv} - \ell_m)r$ u pravcu y osi, ali suprotnog smjera. Tu brzinu vertikalnog repa možemo zamijeniti istom tolikom brzinom zraka ali suprotnog smjera, a to znači u smjeru os y . U tom slučaju zrak koji dolazi na vertikalni rep ima dvije brzine, kao na slici 4-16.



Slika 4-16. Moment valjanja od vertikalnog repa

Aerodinamičku brzinu V i ovu fiktivnu $(\ell_{cv} - \ell_m)r$ u pravcu i smjeru osi y . Rezultirajuća brzina zraka ima negativni dopunski napadni kut na vertikalni rep

$$\Delta\beta_v = \frac{(\ell_{cv} - \ell_m)r}{V},$$

zbog koje se pojavljuje pozitivna bočna sila okomita na vertikalni rep

$$\eta_v \frac{\rho V^2}{2} S_v (C_{N\alpha})_v \frac{(\ell_{cv} - \ell_m)r}{V}.$$

Ta sila ima pozitivan moment oko osi x tromosti letjelice koji čini moment valjanja zbog kutne brzine skretanja:

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{lr} \frac{rb}{V} = \eta_v \frac{\rho V^2}{2} S_v (C_{N\alpha})_v \frac{(\ell_{cv} - \ell_m)r}{V} |z_{cv}|$$

Kraćenjem dobivamo

$$C_{lr} = \eta_v \frac{S_v}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_v \frac{\ell_{cv} - \ell_m}{b} \frac{|z_{cv}|}{b}. \quad 4.46$$