

## 6 DINAMIKA LETJELICA

### 6.1 Relativno gibanje

#### 6.1.1 Kinematika relativnog gibanja

Brojni su primjeri složenih gibanja. Kao primjer složenog gibanja točke promatrajmo gibanje muhe u zrakoplovu (jer muhu možemo zamisliti kao materijalnu točku). To gibanje muhe u zrakoplovu nazivamo relativno gibanje, gibanje zrakoplova nazivamo prijenosno gibanje, a gibanje muhe u odnosu na Zemlju nazivamo apsolutno gibanje. Koordinatni sustav koji je vezan za Zemlju nazivamo apsolutni koordinatni sustav (u daljnjem tekstu obilježiti ćemo ga sa A, što podsjeća na apsolutni, a koordinatni sustav koji je vezan za letjelicu nazivamo relativni koordinatni sustav, obilježiti ćemo ga sa B što podsjeća na englesku riječ "body". Ishodište relativnog koordinatnog sustava obilježiti ćemo slovom "O".

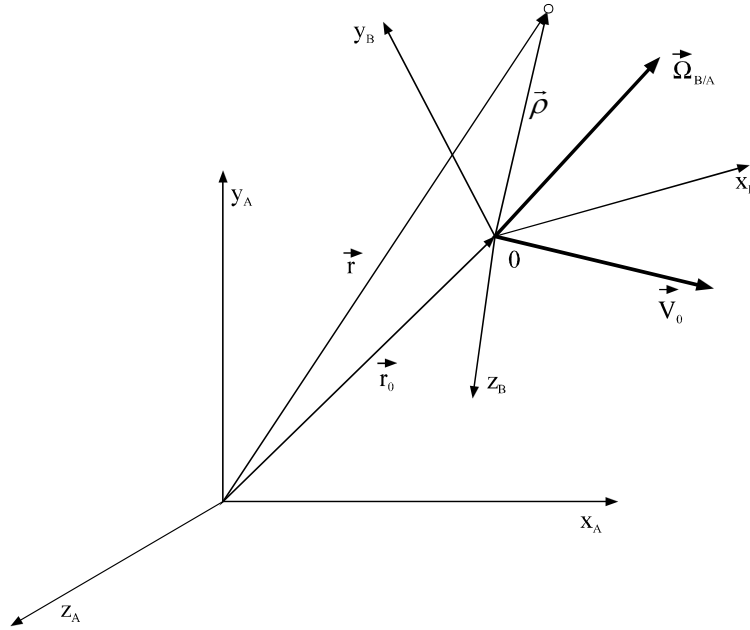
Položaj točke "O" u apsolutnom koordinatnom sustavu A određen je vektorom položaja  $\vec{r}_0$  (od ishodišta apsolutnog koordinatnog sustava do ishodišta "O" relativnog koordinatnog sustava). Projekcije toga vektora na osi apsolutnog koordinatnog sustava A funkcije su vremena. U primjeru koji smo naveli točka "O" je neka točka letjelice, a projekcije vektora  $\vec{r}_0$  na osi apsolutnog koordinatnog sustava su koordinate položaja letjelice. Označimo sa  $\mathbf{r}_0$  matricu od jedne kolone koju čine tri projekcije na osi apsolutnog koordinatnog sustava toga vektora. Derivacije po vremenu ovih koordinata su komponente apsolutne brzine točke "O" letjelice  $\vec{V}_0$ , ili

$$\mathbf{V}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0, \quad 6.1$$

a derivacije projekcija apsolutne brzine na osi apsolutnog koordinatnog sustava su komponente apsolutnog ubrzanja točke "O" letjelice,  $\vec{a}_0$ , ili

$$\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{V}}_0 = \ddot{\mathbf{r}}_0. \quad 6.2$$

Relativni koordinatni sustav B giba se u prostoru u odnosu na apsolutni koordinatni sustav A. To gibanje je zbroj translacije, koja je određena brzinom ishodišta relativnog koordinatnog sustava  $\vec{V}_0$ , i rotacije koordinatnog sustava oko ishodišta "O". Kutnu brzinu te rotacije označavamo sa  $\vec{\Omega}$ . Drugim riječima,  $\vec{\Omega}$  je kutna brzina relativnog koordinatnog sustava B u odnosu na apsolutni koordinatni sustav A. U našem primjeru to je kutna brzina zrakoplova. (slika 6-1)



Slika 6-1. Apsolutni i relativni koordinatni sustavi

Položaj neke točke "M" u relativnom koordinatnom sustavu određen je relativnim vektorom položaja  $\vec{\rho}$  od ishodišta relativnog koordinatnog sustava "O" do promatrane točke "M". Projektije tog vektora  $\vec{\rho}$  na osi relativnog koordinatnog sustava su relativne koordinate položaja točke "M". Označimo sa  $\mathbf{p}$  matricu od jednog stupca koju čine tri projekcije na osi relativnog koordinatnog sustava. Derivacije tih koordinata po vremenu su komponente relativne brzine točke "M" koju označavamo sa  $\vec{V}_r$ . U tom slučaju bit će

$$\mathbf{V}_r = \dot{\mathbf{p}}. \quad 6.3$$

Derivacije projekcija relativne brzine na osi relativnog koordinatnog sustava su komponente relativnog ubrzanja  $\vec{a}_r$  te je

$$\mathbf{a}_r = \dot{\mathbf{V}}_r = \ddot{\mathbf{p}}. \quad 6.4$$

Vektor položaja točke "M" u apsolutnom koordinatnom sustavu A neka bude  $\vec{r}$ . On je zbroj dvaju vektora: vektora položaja letjelice  $\vec{r}_0$  i relativnog vektora položaja  $\vec{\rho}$  tj.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{L}_{AB} \mathbf{p}. \quad 6.5$$

Sa  $\mathbf{L}_{AB}$  označili smo matricu transformacije u apsolutni koordinatni sustav A iz relativnog koordinatnog sustava B. Deriviranjem po vremenu ove jednačbe dobivamo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \mathbf{V}_0 - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{A/B} \mathbf{L}_{AB} \mathbf{p} + \mathbf{L}_{AB} \mathbf{V}_r \quad 6.6$$

Prema pravilu o derivaciji matrice transformacije, trebamo  $\mathbf{L}_{AB}$  pomnožiti ispred sa kososimetričnom matricom (od komponenata u koordinatnom sustavu A) kutne brzine koordinatnog sustava A u odnosu na sustav B. Kako je  $\vec{\Omega}$  kutna brzina koordinatnog sustava B u odnosu na A, onda je kutna brzina B u odnosu na A

$$\tilde{\omega}_{A/B} = -\tilde{\Omega}_{B/A}. \quad 6.7$$

Derivacija po vremenu apsolutnog vektora položaja  $\vec{r}$  točke "M" je apsolutna brzina. Isto kao što projekcije vektora  $\vec{r}$  čine matricu  $\mathbf{r}$  tako i derivacije te matrice čine matricu projekcija apsolutne brzine  $\mathbf{V}$  na koordinatne osi sustava A. Tako je konačno

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \tilde{\Omega}_{B/A}^A \mathbf{L}_{AB} \boldsymbol{\rho} + \mathbf{L}_{AB} \mathbf{V}_r. \quad 6.8$$

Derivirajmo još jedanput po vremenu ovu jednadžbu

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \left( \frac{d}{dt} \tilde{\Omega}_{B/A}^A \right) \mathbf{L}_{AB} \boldsymbol{\rho} + \tilde{\Omega}_{B/A}^A \left( \tilde{\Omega}_{B/A}^A \mathbf{L}_{AB} \boldsymbol{\rho} + \mathbf{L}_{AB} \mathbf{V}_r \right) + \tilde{\Omega}_{B/A}^A \mathbf{L}_{AB} \mathbf{V}_r + \mathbf{L}_{AB} \mathbf{a}_r. \quad 6.9$$

Kutno ubrzanje  $\vec{\epsilon}$  derivacija je vektora kutne brzine  $\vec{\Omega}_{B/A}$ . Ako su projekcije kutne brzine u apsolutnom koordinatnom sustavu  $\Omega_{B/A}^A$ , onda njihovim deriviranjem po vremenu dobivamo projekcije (u istom kutnom sustavu) kutnog ubrzanja

$$\boldsymbol{\epsilon}^A = \frac{d\Omega_{B/A}^A}{dt}, \quad 6.10$$

te je

$$\mathbf{a}^A = \mathbf{a}_0^A + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^A \boldsymbol{\rho}^A + \tilde{\Omega}_{B/A}^A \tilde{\Omega}_{B/A}^A \boldsymbol{\rho}^A + 2\tilde{\Omega}_{B/A}^A \mathbf{V}_r^A + \mathbf{a}_r^A. \quad 6.11$$

Primjenom pravila o transformaciji produkta kososimetrične matrice i matrice od jednog stupca, prethodnu jednadžbu možemo napisati i u koordinatnom sustavu B. Množenjem te jednadžbe s matricom transformacije  $\mathbf{L}_{BA}$ , dobivamo

$$\mathbf{a}^B = \mathbf{a}_0^B + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\rho} + \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} \boldsymbol{\rho} + 2\tilde{\Omega} \mathbf{V}_r + \mathbf{a}_r. \quad 6.12$$

Matrice  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\mathbf{V}_r$ ,  $\mathbf{a}_r$ ,  $\tilde{\Omega}$  i  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  sastavljene su, prema definiciji, od projekcija ovih vektora na osi koordinatnog sustava B, te nema potrebe da to naznačimo, a matrice  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{a}_0$  sastavljene su od projekcija na osi koordinatnog sustava A, pa je zato potrebno naznačiti da ih treba transformirati u koordinatni sustav B.

Uočimo onu točku "P" relativnog prostora koja je fiksna u relativnom prostoru, ali se u promatranom trenutku poklapa s točkom "M". Drugim riječima, pokretna točka "M" nalazi se u trenutku "t" u točki "P" relativnog prostora. U primjeru koji smo uzeli to je točka zrakoplova u kojoj se nalazi muha. U drugom trenutku bit će to druga točka zrakoplova P', jer će se točka "M" u međuvremenu pomaknuti iz položaja P u položaj P'. Ako tražimo ubrzanje

te točke P, onda imajući na umu da je ona nepokretna u relativnom koordinatnom sustavu slijedi da ona nema ni relativnu brzinu  $\mathbf{V}_r$  ni relativno ubrzanje  $\mathbf{a}_r$ , te je njeno apsolutno ubrzanje

$$\mathbf{a}_p^B = \mathbf{a}_O^B + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rho + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \rho. \quad 6.13$$

Iz toga vidimo da zbroj prva tri člana na desnoj strani jednadžbe predstavlja ubrzanje točke P. To ubrzanje nazivamo prijenosno ubrzanje i označavamo ga sa  $\mathbf{a}_p$ . Međutim, apsolutno ubrzanje nije jednako zbroju prijenosnog ubrzanja i relativnog, jer u jednadžbi imamo još jedno dopunsko ubrzanje koje nazivamo Coriolisovo ubrzanje

$$\mathbf{a}_K^B = 2\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{V}_r. \quad 6.14$$

Na osnovi definicija o prijenosnom i Coriolisovu ubrzanju konačno možemo zaključiti da je apsolutno ubrzanje jednako zbroju prijenosnog, Coriolisovog i relativnog ubrzanja.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_K + \mathbf{a}_r, \quad 6.15$$

ali sve komponente, pa i rezultanta trebaju biti u koordinatnom sustavu A ili u koordinatnom sustavu B.

### 6.1.2 Inercijske sile

Newtonov zakon da je vektor ubrzanja središta mase pomnožen skalarom koji predstavlja masu jednak rezultanti vanjskih sila koje djeluju na tijelo, može se primjenjivati samo u apsolutnom (ili inercijskom) koordinatnom sustavu. Međutim, let je relativno gibanje, jer je to gibanje u odnosu na neki koordinatni sustav vezan za Zemlju, a kako se Zemlja okreće, svi koordinatni sustavi koji su vezani za Zemlju jesu relativni koordinatni sustavi. Postavlja se pitanje čemu je jednak produkt vektora relativnog ubrzanja  $\bar{\mathbf{a}}_r$  s masom. Iz gornje jednadžbe imamo

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_p - m\mathbf{a}_K.$$

Na desnoj strani produkt  $m\mathbf{a}$  jednak je projekcijama rezultate vanjskih sila  $\mathbf{R}$  na osi istog koordinatnog sustava, te je

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{R} - m\mathbf{a}_p - m\mathbf{a}_K. \quad 6.16$$

Iz ove jednadžbe vidimo da je umnožak vektora relativnog ubrzanja s masom također jednak rezultanti vanjskih sila, ali uvećanoj za još dva vektora koje zovemo inercijske sile, i to:

$$\text{prijenosna inercijska sila} \quad \mathbf{F}_p = -m\mathbf{a}_p,$$

$$\text{Coriolisova inercijska sila} \quad \mathbf{F}_K = -m\mathbf{a}_K.$$

Prijenosna inercijska sila je umnožak mase s prijenosnim ubrzanjem obrnutog smjera, a Coriolisova inercijska sila je umnožak mase s Coriolisovim ubrzanjem obrnutog smjera. U relativnom prostoru te inercijske sile i stvarne sile zbrajaju se u rezultatu, koja je jednaka umnošku relativnog ubrzanja i mase:

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{R} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_K. \quad 6.17$$

Znači možemo i u relativnom koordinatnom sustavu primjenjivati Newtonov zakon, ali onda moramo stvarnim vanjskim silama dodati i dvije inercijske sile: prijenosnu i Coriolisovu. Uočimo činjenicu da zbog toga neko tijelo u relativnom koordinatnom sustavu može imati neko ubrzanje i ako nema vanjskih sila koje djeluju na to tijelo, jer to ubrzanje mogu izazvati inercijske sile.

### 6.1.3 Akcelerometri

Ubrzanja se mjere akcelrometrom. Jednostavan akcelerometar je cjevčica u kojoj se može gibati masa  $m$ . Os te cjevčice određuje os akcelerometra. Princip rada akcelerometra je održavanje ravnoteže male mase nekom silom  $\mathbf{F}$  koju možemo registrirati. Jednostavan primjer održavanja mase "m" u ravnoteži je opruga čija se sila deformacije  $\mathbf{F}$  uravnotežuje s inercijskom silom. Veličina deformacije određuje silu  $\mathbf{F}$ , a kako ta sila uravnotežuje inercijsku silu i silu Zemljišne teže, određujemo kolika je inercijska sila. Da bismo odredili točno inercijsku silu, pogledajmo jednadžbu relativnog gibanja male mase  $m$  u cjevčici. Na nju djeluju:

- sila  $\mathbf{F}$  mjernog elementa (npr. duž osi cjevčice),
- sila Zemljišne teže  $m\mathbf{g}$ ,
- reakcija oslonca  $\mathbf{N}$ , normalna na površinu na kojoj se oslanja mala masa  $m$ . Ta sila  $\mathbf{N}$  okomita je na stijenke cjevčice, a to znači da je  $\mathbf{N}$  okomito na os akcelerometra,
- sila trenja  $\mathbf{R}$  djeluje u pravcu relativne brzine ali je suprotnog smjera,
- inercijske sile: prijenosna  $-m\mathbf{a}_p$  i Coriolisova  $-m\mathbf{a}_K$ .

Prijenosno ubrzanje  $\mathbf{a}_p$  je ubrzanje one točke letjelice u kojoj se u tom trenutku nalazi središte mase "m". Jednadžba relativnog gibanja male mase  $m$  u akcelerometru je:

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{R} + (-m\mathbf{a}_p) + (-m\mathbf{a}_K)$$

Kada se uspostavi ravnoteža male mase  $m$  u akcelerometru, nema sile trenja  $\mathbf{R}$ , jer nema relativnog gibanja, nema Coriolisove inercijske sile jer nema relativne brzine, a relativno ubrzanje je nula jer mala masa  $m$  miruje u relativnom prostoru. Tako, jednadžba relativnog gibanja male mase  $m$  postane jednadžba relativne ravnoteže:

$$0 = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} + (-m\mathbf{a}_p)$$

Postavimo relativni koordinatni sustav tako da je os akcelerometra os  $x$  koordinatnog sustava letjelice. Tada je

$$0 = F_x + mg_x - ma_{px}$$

ili

$$a_{px} = \frac{F_x}{m} + g_x. \quad 6.18$$

Na neki način registriramo silu  $F$ , malu masu  $m$  znamo, te nam je prvi član na desnoj strani poznat, ali drugi moramo odrediti na neki drugi način: drugim mjerenjem ili računom. To znači da akcelerometrom mjerimo projekciju ubrzanja letjelice na os akcelerometra umanjenu za projekciju ubrzanja sile Zemljišne teže. Da bismo dobili kompletnu projekciju ubrzanja točke letjelice, moramo mjerenju dodati projekciju ubrzanja sile Zemljišne teže na os akcelerometra. U izuzetnom slučaju ako je os akcelerometra horizontalna, ovaj dodatak je jednak nuli, te nam je mjerenje jednako projekciji ubrzanja točke letjelice na os akcelerometra.

## 6.2 Temeljni zakoni gibanja letjelica konstantne mase

### 6.2.1 Gibanja središta mase

Kruto tijelo smatramo limesom sustava materijalnih točaka kada njihov broj teži beskonačnosti, a masa se svake materijalne točke infinitezimalno smanjuje. Zato ćemo primjenjivati diferencijalni i integralni račun. Masa jedne materijalne točke ili čestice tijela bit će "dm", a njen vektor položaja (od ishodišta koordinatnog sustava) bit će  $\vec{r}$ , njena brzina je  $\vec{V}$  i njeno ubrzanje je  $\vec{a}$ . Položaj, brzina i ubrzanje te čestice "dm" definirani su u odnosu na koordinatni sustav, koji a priori ne mora biti apsolutni.

Kada kažemo "kruto tijelo" to znači da su čestice tijela u međusobnom konstantnom odnosu, pri čemu tijelo ne mora biti homogeno. Ako su čestice u stalnom međusobnom odnosu, slijedi da su unutrašnje sile djelovanja između čestica u ravnoteži. Drugim riječima, sila kojom djeluje jedna čestica na sve ostale čestice jednaka je sili kojom djeluju te čestice na tu jednu česticu. Kada promatramo jednu česticu, onda moramo uzeti u obzir rezultantu djelovanja svih drugih čestica na tu jednu ( $dF_u$ ), ali kada promatramo sve čestice zajedno, tj. kada tu jednu česticu pridružimo svim ostalim onda se njeno djelovanje na sve druge i djelovanje drugih na nju poništavaju te je ukupna unutrašnja sila jednaka nuli.

Za takvo tijelo definira se "središte mase" prema jednadžbi

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m_m} \int \mathbf{r} dm . \quad 6.19$$

Deriviranjem po vremenu dobivamo brzinu i ubrzanje središta mase

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_c &= \frac{1}{m_m} \int \mathbf{V} dm \\ \mathbf{a}_c &= \frac{1}{m_m} \int \mathbf{a} dm \end{aligned} \quad 6.20$$

To znači da je derivacija količine gibanja tijela konstatne mase određena jednadžbom

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_m \mathbf{V} dm = \int_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} dm = \int_m \mathbf{a} dm = m \mathbf{a}_c \quad 6.21$$

Brzina i ubrzanje bit će apsolutni ako su članovi matrice  $\mathbf{r}$  projekcije vektora na osi apsolutnog koordinatnog sustava. Ako su to projekcije na relativni koordinatni sustav  $\mathbf{p}$ , onda su i brzina i ubrzanje relativne veličine, i to u odnosu na taj isti relativni koordinatni sustav. Zasad nećemo ničim uvjetovati ni položaj ishodišta ni gibanje toga koordinatnog sustava u odnosu na koji promatramo gibanje tijela .

Želimo izvesti jednadžbu relativnog gibanja krutog tijela. Kako smo rekli da kruto tijelo promatramo kao skup njegovih čestica, prvo ćemo promatrati jednu česticu. Na svaku česticu djeluje privlačna sila Zemlje  $\mathbf{a}_\gamma dm$ , a na čestice vanjske površine djeluje i vanjska sila  $d\mathbf{R}$  (sila tlaka zraka i trenja zraka na element vanjske površine). Djelovanje svih drugih čestica tijela na promatranu česticu bit će elementarna unutrašnja sila  $d\mathbf{F}_u$ . Osim ovih stvarnih sila, moraju se dodati i inercijske sile zato što su članovi matrice  $\mathbf{r}$  vektora položaja elementarne čestice, projekcije na osi relativnog koordinatnog sustava, jer je koordinatni sustav u odnosu na koji promatramo gibanje tijela relativni koordinatni sustav, a to gibanje tijela je relativno gibanje. Inercijske sile na elementarnu česticu su

$$\begin{aligned} \text{prijenosna} \quad d\mathbf{F}_p &= -\mathbf{a}_p dm , \\ \text{Coriolisova} \quad d\mathbf{F}_K &= -\mathbf{a}_K dm . \end{aligned}$$

Tako je jednadžba gibanja elementarne čestice tijela u relativnom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{a}_r dm = d\mathbf{R} + \mathbf{a}_\gamma dm + d\mathbf{F}_u + d\mathbf{F}_p + d\mathbf{F}_K = \dot{\mathbf{V}}_r dm$$

Prijenosno ubrzanje bit će definirano prijenosnim gibanjem koordinatnog sustava koje je zadato. Zbrojimo jednadžbe gibanja svih elementarnih čestica letjelice i pređimo na limes. Dobit ćemo

$$\int_m \mathbf{a}_r dm = \mathbf{R} + \mathbf{a}_\gamma m + \int_m d\mathbf{F}_P + \int_m d\mathbf{F}_K$$

Unutrašnje sile su u ravnoteži i  $\int_m d\mathbf{F}_u = 0$ , kao što smo to objasnili, pa je ubrzanje središta

mase:

$$m\mathbf{a}_{cr} = \mathbf{R} + \mathbf{a}_\gamma m + \int_m d\mathbf{F}_P + \int_m d\mathbf{F}_K$$

Označimo sa "O" ishodište koordinatnog sustava, a matrice brzine i ubrzanja ishodišta sa  $\mathbf{V}_0$  i  $\mathbf{a}_0$ , te neka je matrica kutne brzine relativnog koordinatnog sustava  $\mathbf{\Omega}_0$ , onda je rezultanta Coriolisovih sila

$$\int_m d\mathbf{F}_K = \int_m -\mathbf{a}_K dm = \int_m -2\tilde{\mathbf{\Omega}}_0 \mathbf{V}_r dm = -2\tilde{\mathbf{\Omega}}_0 \int_m \mathbf{V}_r dm = -2\tilde{\mathbf{\Omega}}_0 \mathbf{V}_{cr} m = -\mathbf{a}_{cK} m,$$

jer je kutna brzina relativnog koordinatnog sustava ista u svakoj točki tijela. Ova jednadžba pokazuje da je rezultirajuća Coriolisova sila jednaka Coriolisovoj sili ako bi sva masa bila koncentrirana u središtu mase. Slično tome bit će i rezultirajuća prijenosna inercijska sila:

$$\int_m d\mathbf{F}_p = \int_m -\mathbf{a}_p dm = -\int_m (\mathbf{a} - \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_K) dm = -(\mathbf{a}_c - \mathbf{a}_{cr} - \mathbf{a}_{cK}) m = -\mathbf{a}_{cp} m$$

To znači da je zbroj inercijskih prijenosnih sila jednak inercijskoj prijenosnoj sili kao kada bi cijela masa tijela bila koncentrirana u središtu mase tijela.

Uvrstimo li ove rezultate za rezultirajuću inercijsku prijenosnu i Coriolisovu silu u jednadžbu za relativno ubrzanje središta mase dobivamo najvažniju jednadžbu gibanja letjelica:

$$\mathbf{a}_{cr} m = \mathbf{R} + \mathbf{a}_\gamma m + (-\mathbf{a}_{cp} m) + (-\mathbf{a}_{cK} m) \quad 6.22$$

Ova jednadžba nam određuje gibanje središta mase letjelice. Vanjske sile koje čine rezultantu  $\mathbf{R}$  moraju biti poznate (aerodinamička sila) kao i gibanje relativnog koordinatnog sustava kako bismo mogli odrediti inercijsku i Coriolisovu silu. Za to nam je potrebno prijenosno ubrzanje  $\mathbf{a}_{cp}$  središta mase i kutna brzina  $\mathbf{\Omega}_0$ . Ako promatramo gibanje letjelice u odnosu na Zemlju, onda je prijenosna inercijska sila  $-\mathbf{a}_{cp} m$  centrifugalna sila uslijed rotacije Zemlje. Zbroj privlačne sile Zemlje i inercijske prijenosne sile nazivamo sila Zemljišne teže:

$$\mathbf{g} m = \mathbf{a}_\gamma m - \mathbf{a}_{cp} m \quad 6.23$$

te je derivacija brzine leta u koordinatnom sustavu vezanom za Zemlju (npr. lokalnom koordinatnom sustavu):



$$\dot{\mathbf{V}}_K^L = \frac{\mathbf{R}^L}{m} + \mathbf{g}^L + (-\mathbf{a}_{CK}^L),$$

jer je brzina leta relativna brzina. Ako su komponente brzine u koordinatnom sustavu letjelice, onda obično ovu jednadžbu gibanja prenosimo u koordinatni sustav letjelice množenjem sa matricom transformacije  $\mathbf{L}_{FL}$

$$\mathbf{L}_{FL} \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{LF} \mathbf{V}_K) = \frac{\mathbf{R}}{m} + \mathbf{g} + (-\mathbf{a}_{CK}),$$

jer se u koordinatnom sustavu letjelice ne mora označavati u kojemu su koordinatnom sustavu komponente. Coriolisovo ubrzanje u ovoj jednadžbi je  $2\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_E \mathbf{V}_K$ . Derivacija matrice  $\mathbf{L}_{LF}$  je

$$-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{L/F}^L \mathbf{L}_{LF} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}^L \mathbf{L}_{LF},$$

jer je  $-\boldsymbol{\omega}_{L/F} = \boldsymbol{\Omega}$ . Uvrštavanjem u gornju jednadžbu dobivamo

$$\mathbf{L}_{FL} (\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^L \mathbf{L}_{LF} \mathbf{V}_K + \mathbf{L}_{LK} \dot{\mathbf{V}}_K) = \frac{\mathbf{R}}{m} + \mathbf{g} + (-\mathbf{a}_{CK}),$$

odakle je konačno

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{V}_K + \dot{\mathbf{V}}_K = \frac{\mathbf{R}}{m} + \mathbf{g} + (-\mathbf{a}_{CK}). \quad 6.24$$

### 6.2.2 Gibanje oko pomične točke

Drugu temeljnu jednadžbu mehanike letjelica dobit ćemo polazeći od jednadžbe apsolutnog gibanja (dok smo prvu dobili polazeći od relativne jednadžbe gibanja). Vektorsku jednadžbu apsolutnog gibanja čestice  $dm$  projektirat ćemo na relativni koordinatni sustav te dobiti

$$d\mathbf{m} = d\mathbf{R} + d\mathbf{F}_u + \mathbf{g}dm.$$

Usvojiti ćemo relativni koordinatni sustav vezan za letjelicu s ishodištem u točki oko koje promatramo gibanje. Osi toga relativnog koordinatnog sustava imaju istu kutnu brzinu kao i letjelica. Komponente te kutne brzine  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$  duž osi toga istog koordinatnog sustava čine matricu od jednog stupca  $\boldsymbol{\Omega}$ . Pomnožimo ovu jednadžbu vektorski s vektorom relativnog položaja  $\vec{\rho}$  (od ishodišta do čestice  $dm$ ). Dobivamo

$$\vec{\rho} d\mathbf{m} = d\mathbf{M}_0 + d\mathbf{M}_u + \vec{\rho} \mathbf{g} dm$$

vektorski produkt  $\vec{\rho} d\mathbf{R}$ , tj. moment vanjskih sila koje djeluju na česticu  $dm$ , predstavlja elementarni moment vanjskih sila  $d\mathbf{M}_0$ , a produkt  $\vec{\rho} d\mathbf{F}_u$  predstavlja elementarni moment unutrašnjih sila koji smo označili sa  $d\mathbf{M}_u$ . Dobivenu jednadžbu ne možemo u praksi koristiti jer su nam nepoznate unutrašnje sile i njihovi momenti. Zato ćemo i ovu jednadžbu integrirati, kao što smo to uradili s jednadžbom za gibanje središta mase, jer će tom prilikom nestati

momenti unutrašnjih sila. Budući da ishodište nije a priori postavljeno u središtu mase, koordinate središta mase  $\rho_c$  nisu jednake nuli te ćemo imati moment sile Zemljišne teže za ishodište, ali ako je ishodište u središtu mase, taj moment sile Zemljišne teže za ishodište jednak je nuli. Rezultirajući moment vanjskih sila moramo uzeti za točku letjelice u kojoj smo postavili ishodište relativnog koordinatnog sustava, a moment unutrašnjih sila bez obzira na to je li ishodište postavljeno u središtu mase ili nije, bit će

$$\int_m d\mathbf{M}_u = 0.$$

Tako dobivamo

$$\int_m \tilde{\rho} \mathbf{a} dm = \mathbf{M}_O + \tilde{\rho}_C \mathbf{g} m ;$$

$\mathbf{M}_O$  su komponente momenta vanjskih sila za točku letjelice u kojoj smo postavili ishodište relativnog koordinatnog sustava, duž osi relativnog koordinatnog sustava.

$$\mathbf{M}_O = \int_m \tilde{\rho} d\mathbf{R}$$

U tom relativnom koordinatnom sustavu promatramo i komponente vektora položaja (matrica  $\rho$ ). Razmotrimo поближе integral  $\int_m \tilde{\rho} \mathbf{a} dm$ . Da bismo odredili taj integral, pođimo od vektorske definicije kinetičkog momenta:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \int_m \vec{\rho} \times \vec{V} dm \\ \vec{H}_0 &= \int_m \vec{\rho} \times (\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}) dm = \int_m \vec{\rho} \times \vec{V}_0 dm + \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) dm \\ \vec{H}_0 &= \vec{\rho}_C \times \vec{V}_0 m - \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\rho} \times \vec{\Omega}) dm \end{aligned}$$

ili matrično

$$\mathbf{H}_O = \tilde{\rho}_C \mathbf{V}_O m - \int_m \tilde{\rho} \tilde{\rho} dm \mathbf{\Omega}$$

Deriviranjem dobivamo:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_0 = \frac{d}{dt} \int_m \vec{\rho} \times \vec{V} dm$$

Projekcije relativnog vektora ne ovise o vremenu već o položaju elementarne mase. Međutim, ortovi relativnog koordinatnog sustava imaju kutnu brzinu te je njihova derivacija vektorski produkt te kutne brzine i ortova. Tako je derivacija vektora:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}$$

Zato je derivacija integrala:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_m \vec{\rho} \times \vec{v} dm &= \int_m \left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \times \vec{v} + \vec{\rho} \times \vec{a} \right) dm = \int_m \left[ (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) \times \vec{v} + \vec{\rho} \times \vec{a} \right] dm \\ \frac{d}{dt} \int_m \vec{\rho} \times \vec{v} dm &= \int_m \left[ (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) \times (\vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}) + \vec{\rho} \times \vec{a} \right] dm \\ \frac{d}{dt} \int_m \vec{\rho} \times \vec{v} dm &= \left( \vec{\Omega} \times \int_m \vec{\rho} dm \right) \times \vec{v}_0 + \int_m \vec{\rho} \times \vec{a} dm = (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_C) \times \vec{v}_0 m + \int_m \vec{\rho} \times \vec{a} dm \end{aligned}$$

Ako je ishodište u središtu mase ( $O \equiv C$ ), onda je  $\vec{\rho}_C = 0$ , pa je prvi član na desnoj strani jednadžbe jednak nuli. To znači da je derivacija kinetičkog moment za središte mase:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_C = \int_m \vec{\rho} \times \vec{a} dm,$$

kao u slučaju kad se tijelo giba oko nepomične točke (sferno gibanje).

Konačno u ovim jednadžbama zamijenimo integral na desnoj strani  $\int_m \vec{\rho} \times \vec{a} dm$  s momentom vanjskih sila prema jednadžbi (3.30). Dobivamo u općem slučaju:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_0 = -\vec{v}_0 \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_C) m + \vec{M}_0 \quad 6.25$$

$$\dot{\vec{H}}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{H}_0 = -\vec{v}_0 \times \vec{\Omega} \rho_C m + \vec{M}_0, \quad 6.26$$

ili ako je ishodište u središtu mase:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_C = \vec{M}_C \quad 6.27$$

$$\dot{\vec{H}}_C + \vec{\Omega} \times \vec{H}_C = \vec{M}_C \quad 6.28$$

### 6.2.3 Tenzor tromosti

Uloga kinetičkog momenta u rotacijskom gibanju ista je kao količine gibanja u translatorskom gibanju. Kao što je derivacija količine gibanja jednaka rezultanti vanjskih sila, uključujući i inercijske sile, tako je i derivacija kinetičkog momenta za neku točku jednaka momentu vanjskih i inercijskih sila za tu istu točku. Kada integracijom po vremenu dobijemo količinu gibanja, onda dijeljenjem s masom tijela dobivamo brzinu translatorskog gibanja tijela (brzina središta mase tijela). Tako isto integracijom druge vektorske jednadžbe dobivamo kinetički moment, a iz njega trebamo dobiti kutnu brzinu tijela.

Pođimo od definicije kinetičkog momenta za bilo koju točku letjelice:

$$\vec{H} = \int \vec{\rho} \times \vec{V} dm \quad 6.29$$

Podsjetimo se da  $\vec{\rho}$  vektor položaja čestice mase  $dm$  od ishodišta koordinatnog sustava (za koju određujemo kinetički moment), dok je  $\vec{V}$  brzina te čestice  $dm$ . Prema definiciji kinetičkog momenta

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \int \vec{\rho} \times (\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}) dm \\ &= \int \vec{\rho} \times \vec{V}_0 dm + \int \vec{\rho} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) dm \\ &= \vec{\rho}_c \times \vec{V}_0 m - \int \vec{\rho} \times (\vec{\rho} \times \vec{\Omega}) dm, \end{aligned}$$

ili matrično

$$\mathbf{H}_0 = \vec{\rho}_c \times \mathbf{V}_0 m - \left( \int \tilde{\rho} \tilde{\rho} dm \right) \mathbf{\Omega} \quad 6.30$$

Ako je ishodište u središtu mase,

$$\vec{H}_c = - \int \vec{\rho} \times (\vec{\rho} \times \vec{\Omega}) dm,$$

ili matrično

$$\mathbf{H}_c = \left( - \int \tilde{\rho} \tilde{\rho} dm \right) \mathbf{\Omega}. \quad 6.31$$

Matricu dimenzije 3x3 koja se pojavila u oba slučaja u maloj zagradi na desnoj strani matrične jednadžbe nazivamo "tenzor tromosti" i označavamo je sa  $\mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= - \int \tilde{\rho} \tilde{\rho} dm = \int \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -z & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -z & x & 0 \end{bmatrix} dm \\ &= \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int zxdm \\ - \int xy dm & \int (z^2 + x^2) dm & - \int yz dm \\ - \int zx dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ili

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad 6.32$$

Članovi tenzora tromosti imaju svoja imena. Po dijagonali to su *aksijalni* momenti tromosti:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad \text{moment tromosti za os } x,$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) dm \quad \text{moment tromosti za os } y,$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm \quad \text{moment tromosti za os } z.$$

a članovi van dijagonale nazivaju se *centrifugalni* ili *devijacijski* momenti tromosti:

$$I_{yz} = \int yz \, dm \quad I_{zx} = \int zx \, dm \quad I_{xy} = \int xy \, dm$$

Uočimo važnu značajku centrifugalnih momenata tromosti. Ako je neka koordinatna ravnina istodobno i ravnina simetrije, onda svakoj čestici  $dm$  odgovara ista takva čestica s druge strane ravnine, koja ima jednu koordinatu istu, a drugu iste veličine ali suprotnog predznaka, te je ukupni integral po tijelu jednak nuli. Tako za slučaj da je ravnina Oxy ravnina simetrije, centrifugalni momenti tromosti koji sadrže koordinatu "z" bit će nula ( $I_{yz} = I_{yx}$ ), jer se u podintegralnoj funkciji nalazi "z" koje je pozitivno za pola tijela s jedne strane ravnine simetrije, a negativno za drugu polovicu na drugoj strani ravnine simetrije. Ako koordinatne osi imaju sva tri centrifugalna momenta tromosti jednaka nuli, takve osi nazivamo **glavne osi tromosti**.

Iz zadnjih jednadžba prethodnog odjeljka vidimo da je kinetički moment letjelice za središte mase C

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\Omega}, \quad 6.33$$

a za točku letjelice O koja nije u središtu mase:

$$\mathbf{H}_O = \tilde{\rho}_C \mathbf{V}_O m + \mathbf{I}_O \boldsymbol{\Omega} \quad 6.34$$

Dalje ćemo tenzor tromosti za bilo koju točku označavati sa  $\mathbf{I}$ , bez posebnih oznaka. Ako je potrebno istaknuti da je tenzor tromosti za središte mase onda ga označavamo sa  $\mathbf{I}_C$ . Isto tako i kinetički moment za bilo koju točku bit će  $\vec{H}$ , a za središte mase je  $\vec{H}_C$ .

#### 6.2.4 Transformacija tenzora tromosti

Veličina kinetičkog momenta za bilo koju točku letjelice ne ovisi o izboru koordinatnog sustava. Kako je ta veličina invarijanta, vektor  $\vec{H}$  ne mijenja svoj intenzitet, ni pravac, ni smjer promjenom koordinatnog sustava. Neka koordinatni sustav glavnih osi tromosti "B" ima ishodište u središtu mase. Tada su komponente kinetičkog momenta:

$$\mathbf{H}^B = \left[ I_x^B p^B \quad I_y^B q^B \quad I_z^B r^B \right]^T.$$

$I_x^B, I_y^B, I_z^B$  su momenti tromosti za glavne osi, a  $p^B, q^B, r^B$  su komponente kutne brzine letjelice duž glavnih osi tromosti. Međutim, često ne znamo a priori glavne osi tromosti, već počinjemo s nekim pogodnim koordinatnim sustavom "D" s ishodištem u središtu mase letjelice, za koji nam je poznat tenzor tromosti  $\mathbf{I}^D$ . Za taj koordinatni sustav je

$$\mathbf{H}^D = \mathbf{I}^D \boldsymbol{\Omega}^D$$

Aksijalni i centrifugalni momenti tromosti u tenzoru  $\mathbf{I}^D$  određeni su za koordinatni sustav "D", a  $\boldsymbol{\Omega}^D$  su komponente kutne brzine u tom istom koordinatnom sustavu. Kako su  $\mathbf{H}^B$  i  $\mathbf{H}^D$  komponente istog vektora, onda je

$$\mathbf{H}^D = \mathbf{L}_{DB} \mathbf{H}^B,$$

ili

$$\mathbf{I}^D \boldsymbol{\Omega}^D = \mathbf{L}_{DB} \mathbf{I}^B \boldsymbol{\Omega}^B,$$

odakle dobivamo temeljno pravilo za transformaciju tenzora tromosti zaokrenemo li koordinatni sustav:

$$\mathbf{I}^D = \mathbf{L}_{DB} \mathbf{I}^B \mathbf{L}_{BD} \quad 6.35$$

Znamo tenzor tromosti u koordinatnom sustavu "D" koji smo odabrali tako da lako odredimo taj tenzor  $\mathbf{I}^D$ . Glavne osi tromosti kao i momenti tromosti za te osi (glavni momenti tromosti) nisu poznati. Pokazat ćemo da su glavni momenti tromosti korijeni karakteristične jednadžbe trećega reda

$$|\mathbf{sJ} - \mathbf{I}^D| = 0$$

u kojoj je "s" skalar, a  $\mathbf{J}$  jedinična matrica. Glavni momenti tromosti su vlastite vrijednosti matrice  $\mathbf{I}^D$ . Pođimo od identiteta

$$\begin{aligned} |\mathbf{sJ} - \mathbf{I}^D| &= |\mathbf{L}_{DB} \mathbf{sJ} \mathbf{L}_{BD} - \mathbf{L}_{DB} \mathbf{I}^B \mathbf{L}_{BD}| \\ &= |\mathbf{L}_{DB} (\mathbf{sJ} - \mathbf{I}^B) \mathbf{L}_{BD}| \end{aligned}$$

Kako je determinanta produkta matrica jednaka produktu determinanata matrica, bit će

$$|\mathbf{sJ} - \mathbf{I}^D| = |\mathbf{L}_{DB}| |\mathbf{sJ} - \mathbf{I}^B| |\mathbf{L}_{BD}|,$$

te kako je determinanta matrice transformacije jednaka jedinici imamo konačno

$$|\mathbf{sJ} - \mathbf{I}^D| = |\mathbf{sJ} - \mathbf{I}^B|.$$

Tenzor tromosti  $\mathbf{I}^B$  ima samo članove na dijagonali, te razvijanjem desne strane jednadžbe dobivamo

$$|\mathbf{sJ} - \mathbf{I}^D| = (s - I_x^B)(s - I_y^B)(s - I_z^B). \quad 6.36$$

Za rotacijska tijela (os rotacije  $x$ ) momenti tromosti za osi okomite na os rotacije su jednaki ( $I_y^B = I_z^B$ ) pa se dobiva jedan dvostruki korijen.

Položaj glavnih osi tromosti (koordinatni sustav B) odredit ćemo u odnosu na izabrani koordinatni sustav D pomoću temeljne jednadžbe koju možemo napisati u obliku

$$\mathbf{I}^D \mathbf{L}_{DB} = \mathbf{L}_{DB} \mathbf{I}^B.$$

Matricu transformacije  $\mathbf{L}_{DB}$  koju trebamo, izrazit ćemo u obliku tri ortu

$$\mathbf{L}_{DB} = [\mathbf{b}_X^D \quad \mathbf{b}_Y^D \quad \mathbf{b}_Z^D] \quad 6.37$$

To su komponente ortova B na osi koordinatnog sustava D. Tako se jednažba

$\mathbf{I}^D \mathbf{L}_{DB} = \mathbf{L}_{DB} \mathbf{I}^B$  može napisati u obliku:

$$\mathbf{I}^D [\mathbf{b}_X \quad \mathbf{b}_Y \quad \mathbf{b}_Z] = \begin{bmatrix} b_{XX} & b_{YX} & b_{ZX} \\ b_{XY} & b_{YY} & b_{ZY} \\ b_{XZ} & b_{YZ} & b_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

koji možemo rastaviti na tri jednažbe

$$\mathbf{I}^D \mathbf{b}_X = \mathbf{b}_X s_1$$

$$\mathbf{I}^D \mathbf{b}_Y = \mathbf{b}_Y s_2$$

$$\mathbf{I}^D \mathbf{b}_Z = \mathbf{b}_Z s_3$$

Na taj način se problem traženja matrice transformacije  $\mathbf{L}_{BA}$  svodi na određivanje triju vektora iz jednažba:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}^D - s_1 \mathbf{J}) \mathbf{b}_X &= 0 \\ (\mathbf{I}^D - s_2 \mathbf{J}) \mathbf{b}_Y &= 0 \\ (\mathbf{I}^D - s_3 \mathbf{J}) \mathbf{b}_Z &= 0 \end{aligned} \quad 6.38$$

U linearnoj algebri ta se tri ortu  $\mathbf{b}_X, \mathbf{b}_Y$  i  $\mathbf{b}_Z$  nazivaju karakteristični vektori matrice  $\mathbf{L}_{DB}$ .

U praktičnom radu pojavljuje se potreba izračunavanja tenzora tromosti  $\mathbf{I}_0$  za koordinatni sustav  $D_0$  s ishodištem u točki 0 koji ima osi paralelne s osima koordinatnog sustava  $D_c$  čije je ishodište u središtu mase i za koji znamo tenzor tromosti  $\mathbf{I}_c$ . Obilježimo sa  $\mathbf{r}$  komponente vektora položaja čestice  $dm$  u koordinatnom sustavu  $D_0$ , a sa  $\boldsymbol{\rho}$  vektor položaja iste čestice u koordinatnom sustavu  $D_c$  (ishodište u središtu mase). Tada je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}$$

gdje je  $\mathbf{r}_c$  vektor položaja središta mase u koordinatnom sustavu  $D_0$ . Tenzor tromosti za novi koordinatni sustav  $D_0$  po definiciji je:

$$\mathbf{I}_0 = -\int \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}} dm$$

ili

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0 &= -\int (\tilde{\mathbf{r}}_c + \tilde{\boldsymbol{\rho}})(\tilde{\mathbf{r}}_c + \tilde{\boldsymbol{\rho}}) dm \\ &= -\int \tilde{\mathbf{r}}_c \tilde{\mathbf{r}}_c dm - \int \tilde{\mathbf{r}}_c \tilde{\boldsymbol{\rho}} dm - \int \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\mathbf{r}}_c dm - \int \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\rho}} dm \\ &= -\tilde{\mathbf{r}}_c \tilde{\mathbf{r}}_c m - \tilde{\mathbf{r}}_c \int \tilde{\boldsymbol{\rho}} dm - \left( \int \tilde{\boldsymbol{\rho}} dm \right) \tilde{\mathbf{r}}_c - \int \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\rho}} dm \\ &= -\tilde{\mathbf{r}}_c \tilde{\mathbf{r}}_c m - \tilde{\mathbf{r}}_c \tilde{\boldsymbol{\rho}}_c m - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_c \tilde{\mathbf{r}}_c m + \mathbf{I}_c \end{aligned}$$

$\rho_c = 0$  zato što je ishodište koordinatnog sustava  $D_c$  u središtu mase. Traženi tenzor tromosti za ishodište 0 bit će

$$\mathbf{I}_0 = -\tilde{\mathbf{r}}_c \tilde{\mathbf{r}}_c m + \mathbf{I}_c. \quad 6.39$$

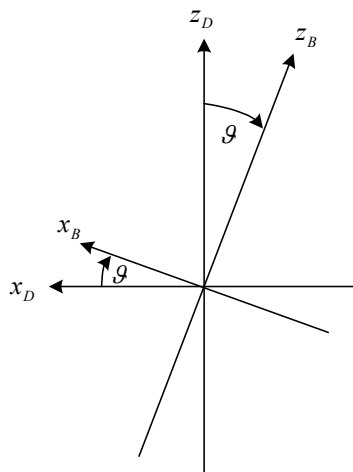
To je tzv. *Steinerov teorem*.

Tenzor tromosti nekog tijela složenog geometrijskog oblika izračunavamo pomoću Steinerovoga teorema i teorema o rotaciji tenzora tromosti. Prvo rastavimo tijelo složenog geometrijskog oblika na dijelove jednostavnih geometrijskih oblika kojima znamo središte mase, glavne osi i tenzor tromosti za te osi. Za izračunato središte mase tijela i odabrani koordinatni sustav u središtu mase tijela, transliramo i rotiramo tenzore tromosti svakog dijela u to središte mase tijela i za te odabrane osi tijela. Zbrajanjem tako transliranih i rotiranih tenzora tromosti dijelova dobivamo tenzor tromosti tijela za odabrani koordinatni sustav u središtu mase tijela, te određujemo glavne osi i tenzor tromosti tijela.

### 6.2.5 Primjer

A priori za zrakoplovne konfiguracije znamo da su glavne osi u ravnini simetrije letjelice. U središtu mase letjelice postavljamo pravac osi  $x$  na primjer u pravcu pogonske sile, ili u pravcu osi tijela letjelice, a os  $z$  okomito prema dolje u vertikalnoj ravnini. Za tako izabrane osi izračunamo tenzor tromosti koji ima oblik

$$\mathbf{I}^D = \begin{bmatrix} I_X^D & 0 & I_{ZX}^D \\ 0 & I_Y^D & 0 \\ I_{ZX}^D & 0 & I_Z^D \end{bmatrix}$$



Slika 6-2 Pogled u vrh osi  $y$



Želimo odrediti glavne osi tromosti i momente za te osi. Kako je os  $y$  okomita na ravninu simetrije, ona je već glavna os tromosti te je i moment tromosti oko te osi glavni moment tromosti:

$$I_Y^B = I_Y^D$$

Glavne osi tromosti  $x_B$  i  $z_B$  okrenute su u ravnini simetrije za kut  $\vartheta$  oko osi  $y$  u odnosu na usvojene osi  $x_D$  i  $z_D$ , a to znači da je

$$\mathbf{L}_{BD} = \mathbf{L}_Y(\vartheta).$$

kao na slici 6-2. Da bismo odredili ovaj kut, moramo prvo naći glavne momente tromosti za osi  $I_X^B$  i  $I_Z^B$  iz jednadžbe

$$|\mathbf{I}^D - s\mathbf{J}| = 0,$$

ili

$$\begin{vmatrix} I_X^D - s & 0 & I_{ZX}^D \\ 0 & I_Y^D - s & 0 \\ I_{ZX}^D & 0 & I_Z^D - s \end{vmatrix} = 0,$$

što daje jednadžbu

$$\begin{aligned} (I_X^D - s)(I_Y^D - s)(I_Z^D - s) - (I_{ZX}^D)^2(I_Y^D - s) &= 0 \\ (I_X^D - s)(I_Z^D - s) - (I_{ZX}^D)^2 &= 0 \\ s^2 - (I_X^D + I_Z^D)s + I_X^D I_Z^D - (I_{ZX}^D)^2 &= 0, \end{aligned}$$

odakle je

$$s_{1,2} = \frac{I_X^D + I_Z^D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_X^D + I_Z^D}{2}\right)^2 + (I_{ZX}^D)^2 - I_X^D I_Z^D}.$$

Time smo odredili glavne momente tromosti  $I_X^B = s_1$  i  $I_Z^B = s_2$ , a kako smo već na početku obrazložili da je  $I_Y^B = I_Y^D$ , odredili smo cijeli tenzor tromosti za glavne osi:

$$\mathbf{I}^B = \begin{bmatrix} I_X^B & 0 & 0 \\ 0 & I_Y^B & 0 \\ 0 & 0 & I_Z^B \end{bmatrix}$$

Iz jednadžbe da je

$$\mathbf{L}_{DB} \mathbf{I}^B \mathbf{L}_{BD} = \mathbf{I}^D$$

dobivamo jednadžbu po kutu rotacije osi:

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_X^B & 0 & 0 \\ 0 & I_Y^B & 0 \\ 0 & 0 & I_Z^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X^D & 0 & I_{ZX}^D \\ 0 & I_Y^D & 0 \\ I_{ZX}^D & 0 & I_Z^D \end{bmatrix}$$

što množenjem matrica daje:

$$\begin{bmatrix} I_X^B \cos^2 \vartheta + I_Z^B \sin^2 \vartheta & 0 & (I_Z^B - I_X^B) \sin \vartheta \cos \vartheta \\ 0 & I_Y^B & 0 \\ (I_Z^B - I_X^B) \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 & I_X^B \sin^2 \vartheta + I_Z^B \cos^2 \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X^D & 0 & I_{ZX}^D \\ 0 & I_Y^D & 0 \\ I_{ZX}^D & 0 & I_Z^D \end{bmatrix}$$

Izjednačavanjem člana na lijevoj i desnoj strani dobivamo:

$$I_Y^B = I_Y^D$$

$$\begin{aligned} I_X^B \cos^2 \vartheta + I_Z^B \sin^2 \vartheta &= I_X^D \\ (I_Z^B - I_X^B) \sin \vartheta \cos \vartheta &= I_{ZX}^D \\ I_X^B \sin^2 \vartheta + I_Z^B \cos^2 \vartheta &= I_Z^D \end{aligned}$$

Zbrajanjem druge i četvrte jednadžbe dobivamo

$$I_X^B + I_Z^B = I_X^D + I_Z^D,$$

a iz treće jednadžbe:

$$(I_Z^B - I_X^B) \frac{\sin 2\vartheta}{2} = I_{ZX}^D,$$

određujemo kut  $\vartheta$  između glavne osi tromosti  $x_B$  i izabrane osi  $x_D$ .

### 6.3 Zakoni gibanja letjelice promjenjive mase

Treće poglavlje posvetili smo aerodinamičkoj sili zrakoplova i aerodinamičkom momentu. Međutim, za razmatranje upravljanja i statičke stabilnosti potrebne su nam komponente pogonske sile i pogonskog momenta. One se izučavaju u mehanici tijela promjenjive mase.

#### 6.3.1 Sustav promjenjive mase $\Sigma$

Letjelice s propulzivnim i reaktivnim motorima čine sustave promjenjive mase, jer pri izgaranju troše zrak koji ulazi u letjelicu i gorivo koje je u letjelici, a ispuštaju plinovite produkte izgaranja. Takve letjelice nazivamo *sustav promjenjive mase*. Na tim letjelicama razlikujemo: tijelo letjelice stalne mase, gorivo (kruto, tekuće) promjenjive mase i plinove izgaranja. U odnosu na tijelo letjelice, tekuće se gorivo i plinovi gibaju. Na takvu letjelicu koja nije nepromjenjive mase ne mogu se a priori primijeniti temeljni zakoni klasične mehanike. Zato je nužno proučiti gibanje takvih tijela kako bi se postavili novi temeljni zakoni koji su nam potrebni za proučavanje gibanja letjelica promjenjive mase.

Pri izučavanju gibanja letjelice, uključujemo sve materijalne čestice (bez obzira na to pripadaju li tijelu, tekućini ili plinu) koje se nalaze unutar tzv. **kontrolne površine** (označavamo je slovom  $F$ ). Tu zatvorenu površinu čine vanjska površina letjelice, površine ulaznih presjeka usisnika i površine izlaznih presjeka motora. Usvajamo da se ta kontrolna površina  $F$  ne deformira. U svakom trenutku materijalne čestice unutar te kontrolne površine čine sustav promjenjive mase koji promatramo. Taj sustav označit ćemo slovom  $\Sigma$ .

Pokazat ćemo da se zakoni gibanja (zakoni o derivacijama količine gibanja i kinetičkog momenta) za tijela promjenjive mase mogu odrediti pomoću solidificiranih tijela na koje se primjenjuju temeljni zakoni klasične mehanike, pod uvjetom da se uz stvarne vanjske sile i momente uvedu još i dopunske sile i momenti koje nazivamo **reaktivne sile i momenti**.

U praksi koordinatni sustav postavljamo u središte mase letjelice, tako da on ima istu kutnu brzinu kao kontrolna površina  $F$ . Kako je letjelica promjenjive mase, središte mase giba se u odnosu na kontrolnu površinu, ali je relativna brzina središta mase nula, jer je ono uvijek u ishodištu. Moguć je i drugi pristup ako koordinatni sustav vežemo za kontrolnu površinu. U tom slučaju središte mase ima relativnu brzinu. U oba slučaju kutna brzina koordinatnog sustava jednaka je kutnoj brzini kontrolne površine  $F$ . Gibanje sustava promjenjive mase promatramo u odnosu na jedan od ta dva koordinatna sustava. To gibanje je relativno gibanje. Neka je  $\vec{V}_r$  brzina u odnosu na izabrani relativni koordinatni sustav, bilo koje čestice  $dm$  unutar kontrolne površine. Za to relativno gibanje označimo sa  $\vec{Q}_r$  količinu gibanja, a sa  $\vec{H}_{r0}$  kinetički moment u odnosu na ishodište relativnog koordinatnog sustava:

$$\begin{aligned}\vec{Q}_r &= \int_{\Sigma} \vec{V}_r dm \\ \vec{H}_{r0} &= \int_{\Sigma} \vec{\rho} \times \vec{V}_r dm\end{aligned}\tag{6.40}$$

Pri tome se integracija izvodi unutar kontrolne površine  $F$ . Vektor  $\vec{\rho}$  određuje položaj promatrane čestice  $dm$  u odnosu na ishodište izabranoga relativnog koordinatnog sustava. Gornjim jednadžbama za sustav  $\Sigma$  određeni su za relativno gibanje, količina gibanja i kinetički moment za ishodište  $O$ .

### 6.3.2 Prividni sustav $\Sigma^*$

Da bismo riješili problem, uvedimo u razmatranje i sustav nepromjenjive mase  $\Sigma^*$ . Taj sustav čine čestice  $dm$  koje se u trenutku  $t$  nalaze u kontrolnoj površini  $F$ . Neka taj sustav čini  $N$  čestica. Nazvat ćemo taj sustav **prividni** jer on ne postoji. U sljedećem trenutku taj sustav čestica nije više u kontrolnoj površini (neke čestice su izašle iz  $F$ , a druge su ušle u  $F$ ) te se taj

sustav  $\Sigma^*$  poklapa sa sustavom  $\Sigma$  samo u trenutku  $t$ . U trenutku  $t+dt$  sustav  $\Sigma$  je promijenio masu ali je ostao u kontrolnoj površini  $F$ , a sustav  $\Sigma^*$  je ostao iste mase ali nije više u kontrolnoj površini  $F$ . Uočimo da sustav  $\Sigma^*$  nije homogeno tijelo. On se sastoji od čestica koje čine kruto tijelo, i od čestica koje se gibaju unutar tog tijela, kao i one koje u trenutku  $t$  prolaze kroz kontrolnu površinu  $F$ . Znači da sustav  $\Sigma^*$  ima čestice koje se gibaju u odnosu na kontrolnu površinu  $F$ .

Za relativno gibanje sustava  $\Sigma^*$  označit ćemo sa  $\vec{Q}_r^*(t)$  i  $\vec{H}_{r0}^*(t)$  količinu gibanja i kinetički moment

$$\begin{aligned}\vec{Q}_r^* &= \int_{\Sigma^*} \vec{V}_r dm \\ \vec{H}_{r0}^* &= \int_{\Sigma^*} \vec{\rho} \times \vec{V}_r dm\end{aligned}\quad 6.41$$

Kako je prividni sustav  $\Sigma^*$  konstantne mase, možemo s relativnom derivacijom po vremenu proći kroz znak integrala, te je za njega

$$\begin{aligned}\frac{\delta \vec{Q}_r^*}{dt} &= \int_{\Sigma^*} \vec{a}_r dm \\ \frac{\delta \vec{H}_{0r}^*}{dt} &= \int_{\Sigma^*} \vec{\rho} \times \vec{a}_r dm.\end{aligned}\quad 6.42$$

### 6.3.3 Očvrsnuti sustav S

Potrebno je uvesti još jedan pojam. Ako u trenutku  $t$  sustav svih materijalnih čestica unutar kontrolne površine  $F$  očvrsnemo, dobivamo kruto tijelo. To tijelo zovemo **očvrsnuta** letjelica  $S$  (slovo  $S$  podsjeća na riječ solid). S fizičke strane treba uočiti da u trenutku  $t$  očvrsnuta letjelica, tj. sustav  $S$  ima istu masu i isto središte mase kao i sustav  $\Sigma$  ili  $\Sigma^*$ , ali nema istu količinu gibanja ni kinetički moment jer smo očvršćivanjem poništili relativno gibanje čestica tekućina i plina u odnosu na tijelo. Međutim, na tu očvrsnutu letjelicu primjenjuju se svi zakoni klasične mehanike. Sa  $\vec{Q}^S(t)$  i sa  $\vec{H}_0^S(t)$  označit ćemo količinu (apsolutnog) gibanja i kinetički moment sustava  $S$

$$\begin{aligned}\vec{Q}^S &= \int \vec{V} dm \\ \vec{H}_0^S &= \int \vec{\rho} \times \vec{V} dm.\end{aligned}\quad 6.43$$

Kako je sustav  $S$  kruto tijelo, derivacijom po vremenu dobivamo:

$$\frac{d\vec{Q}^S}{dt} = \int \vec{a} dm$$

$$\frac{d\vec{H}_0^S}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{\rho} \times \vec{V} dm = \int (\vec{\Omega}_F \times \vec{\rho}) \times (\vec{V}_0 + \vec{\Omega}_F \times \vec{\rho}) dm + \int \vec{\rho} \times \vec{a} dm$$

ili

$$\frac{d\vec{Q}^S}{dt} = \vec{a}_c m$$

$$\frac{d\vec{H}_0^S}{dt} = \int (\vec{\Omega}_F \times \vec{\rho}) \times \vec{V}_0 dm + \int \vec{\rho} \times \vec{a} dm = (\vec{\Omega}_F \times \vec{\rho}_c) \times \vec{V}_0 m + \int \vec{\rho} \times \vec{a} dm$$
6.44

Uočimo da za sustav S ne postoji relativna količina gibanja niti relativni kinetički moment, bez obzira na to vezuje li se relativni koordinatni sustav za kontrolnu površinu **F** ili za središte mase, jer niti jedna točka očvrsnute letjelice, pa ni središte mase, nema relativnu brzinu u odnosu na kontrolnu površinu **F**.

### 6.3.4 Veze između sustava $\Sigma$ i $\Sigma^*$

U trenutku  $t$  sustavi  $\Sigma$  i  $\Sigma^*$  po definiciji su isti :

$$\vec{Q}_r(t) = \vec{Q}_r^*(t)$$

$$\vec{H}_{r0}(t) = \vec{H}_{r0}^*(t),$$
6.45

ali već u sljedećem trenutku  $t + dt$  ta se dva sustava razlikuju (jer su neke čestice izašle a druge ušle kroz kontrolnu površinu), te zato derivacije ovih veličina nisu jednake.

Odredimo veze između derivacija tih veličina. Potražiti ćemo razliku između tih veličina za sustave  $\Sigma$  i  $\Sigma^*$  u vremenskom intervalu  $\Delta t$ . Za promatrača koji se nalazi u relativnom koordinatnom sustavu kroz kontrolnu površinu **F** u vremenu  $\Delta t$

- ulaze čestice s količinom gibanja  $\Delta\vec{Q}_{ru}$  i kinetičkim momentom  $\Delta\vec{H}_{r0u}$  u odnosu na ishodište,
- izlaze čestice s količinom gibanja  $\Delta\vec{Q}_{ri}$  i kinetičkim momentom  $\Delta\vec{H}_{r0i}$  u odnosu na ishodište.

Prema tome, poslije vremena  $\Delta t$  bit će

$$\vec{Q}_r(t + \Delta t) = \vec{Q}_r^*(t + \Delta t) + \Delta\vec{Q}_{ru} - \Delta\vec{Q}_{ri}$$

$$\vec{H}_{0r}(t + \Delta t) = \vec{H}_{0r}^*(t + \Delta t) + \Delta\vec{H}_{0ru} - \Delta\vec{H}_{0ri}.$$

Ako se od tih jednadžbi oduzmu jednadžbe 3.58, zatim razlika podijeli sa  $\Delta t$ , te pusti  $\Delta t$  da teži k prema nuli, dobivaju se relativne derivacije (derivacije u relativnom koordinatnom sustavu) :

$$\begin{aligned}\frac{\delta \vec{Q}_r}{dt} &= \frac{\delta \vec{Q}_r^*}{dt} - \vec{k}_r \\ \frac{\delta \vec{H}_{0r}}{dt} &= \frac{\delta \vec{H}_{0r}^*}{dt} - \vec{h}_{0r},\end{aligned}\quad 6.46$$

gdje je

$$\vec{k}_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ri} - \Delta \vec{Q}_{ru}}{\Delta t} \quad 6.47$$

$$\vec{h}_{0r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{H}_{0ri} - \Delta \vec{H}_{0ru}}{\Delta t} \quad 6.48$$

Veličine  $\vec{k}_r$  i  $\vec{h}_{0r}$  su količina relativnog gibanja i kinetički moment tog relativnog gibanja čestica koje prolaze kroz kontrolnu površinu  $F$  u jedinici vremena (koliko je izašlo umanjeno za onoliko koliko je ušlo). Vektori  $\vec{k}_r$  i  $\vec{h}_{0r}$  zavise od brzine gibanja čestica u odnosu na izabrani koordinatni sustav. Ako želimo da  $\vec{k}_F$  i  $\vec{h}_{0F}$  predstavljaju razliku protoka i momenta protoka kroz kontrolnu površinu  $F$  (protok prema van umanjeno za protok prema unutra), trebamo relativni koordinatni sustav vezati za kontrolnu površinu  $F$ .

### 6.3.5 Načelo očvršćivanja

U odjeljku 6.4 postavili smo temeljne zakone gibanja tijela kao sustava čestica čija je ukupna masa konstantna, a sve čestice sustava pripadaju tijelu. Sve jednačbe koje smo izveli u tom odjeljku izravno se mogu primijeniti na očvršnutu letjelicu, tj. na sustav  $S$ . Sustav  $\Sigma^*$  koji ima ukupnu masu konstantnu možemo razmatrati na sličan način, ali moramo uzeti u obzir da osim čestica tijela (kojih ima najviše), postoje i čestice koje se gibaju u odnosu na tijelo letjelice (npr. čestice tekućina ili čestice plinova). Zbog toga što se neke čestice gibaju u odnosu na tijelo, giba se i središte mase sustava  $\Sigma$  i  $\Sigma^*$  u donosu na tijelo.

Na temelju definicije sustava  $\Sigma$ ,  $\Sigma^*$  i  $S$ , uočimo da sva ta tri sustava imaju u trenutku "t" iste masene karakteristike, da sustavi  $\Sigma$  i  $\Sigma^*$  imaju istu količinu gibanja i isti kinetički moment, ali ne i njihove derivacije po vremenu.

Relativni koordinatni sustav postavljamo na dva načina. Njegovo ishodište vezujemo za fiksnu točku kontrolne površine ili za središte mase sustava, a kutna brzina relativnog koordinatnog sustava je kutna brzina kontrolne površine.

U oba je slučaja jednačba relativnog gibanja bilo koje čestice sustava  $\Sigma$  ili  $\Sigma^*$ :

$$\vec{a}_r dm = d\vec{R} + \vec{g}dm + d\vec{F}_u + d\vec{F}_p + d\vec{F}_k.$$

Prije zbrajanja za sve čestice sustava  $\Sigma$  ili  $\Sigma^*$  pridružimo ovoj jednadžbi i njen produkt s relativnim vektorom položaja. Tako dobivamo dvije jednadžbe:

$$\int \vec{a}_r dm = \vec{R} + \vec{g}m + \int d\vec{F}_u + \int d\vec{F} + \int d\vec{F}_k$$

$$\int \vec{r} \times \vec{a}_r dm = \vec{M}_0 + \int \vec{r} \times \vec{g} dm + \int \vec{r} \times d\vec{F}_u + \int \vec{r} \times d\vec{F}_p + \int \vec{r} \times d\vec{F}_k .$$

Svi su integrali uzeti po sustavu  $\Sigma$  ili  $\Sigma^*$ . Integral na lijevoj strani prve jednadžbe  $\int \vec{a}_r dm$  je relativna derivacija relativne količine gibanja sustava  $\Sigma^*$ , a integral je na lijevoj strani druge jednadžbe  $\int \vec{\rho} \times \vec{a}_r dm$  relativna derivacija po vremenu relativnog kinetičkog momenta za ishodište istoga prividnog sustava  $\Sigma^*$ . Temeljem načela akcije i reakcije bit će

$$\int d\vec{F}_u = 0$$

$$\int \vec{\rho} \times d\vec{F}_u = 0 .$$

Prijenosno gibanje sustava  $\Sigma$  ili  $\Sigma^*$  je gibanje sustava S te je

$$\int d\vec{F}_p = \int_{\Sigma} -\vec{a}_p dm = \int_S -\vec{a} dm = -\vec{a}_C m$$

$$\int d\vec{F}_k = \int_{\Sigma} -2\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_r dm = -2\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_{Cr} .$$

Isto tako je:

$$\int_{\Sigma} \vec{\rho} \times d\vec{F}_p = \int_{\Sigma} \vec{\rho} \times \vec{a}_p dm = \int_S \vec{\rho} \times \vec{a} dm$$

$$\int \vec{\rho} \times d\vec{F}_k = -2 \int_{\Sigma} \vec{\rho} \times (\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_r) dm .$$

Tako dobivamo jednadžbe :

$$\frac{\delta \vec{Q}_r^*}{dt} = \vec{R} + \vec{g}m - \vec{a}_C m - 2\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_{Cr} m$$

$$\frac{\delta \vec{H}_{0r}^*}{dt} = \vec{M}_0 + \vec{\rho}_C \times \vec{g}m - \int \vec{\rho} \times \vec{a}_p dm - 2 \int \vec{\rho} \times (\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_r) dm ,$$

a zatim pomoću veza između derivacija sustava  $\Sigma$  i  $\Sigma^*$  dobivamo :

$$\vec{a}_C m = \vec{R} + \vec{g}m - \vec{k}_r - \frac{d\vec{Q}_r}{dt} - 2\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_{Cr} m ,$$

$$\int \vec{\rho} \times \vec{a}_p dm = \vec{M}_0 + \vec{\rho}_C \times \vec{g}m - \vec{h}_{0r} - \frac{\delta \vec{H}_{0r}}{dt} - 2 \int \vec{\rho} \times (\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_r) dm .$$

Za očvrnutu letjelicu, prema jednadžbi 6.49 bit će

$$\vec{a}_C m = \frac{d\vec{Q}^S}{dt} .$$

Prijenosno ubrzanje  $\vec{a}_p$  je istodobno ubrzanje  $\vec{a}$  te iste materijalne čestice u očvrstnutom sustavu S, jer smo taj sustav definirali tako da se zaustavi relativno gibanje. Na temelju te činjenice bit će

$$\int_{\Sigma^*} \vec{\rho} \times \vec{a}_p dm = \int_S \vec{\rho} \times \vec{a} dm = \frac{d\vec{H}_0^S}{dt} - (\vec{\Omega}_F \times \vec{\rho}_c) \times \vec{V}_0 m,$$

u kojoj je  $\vec{V}_0$  brzina ishodišta. Kada se ovaj integral uvrsti u drugu gornju jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}^S}{dt} &= \vec{R} + \vec{g}m - \vec{k}_r - \frac{d_r \vec{Q}_r}{dt} - 2\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_{Cr} m \\ \frac{d\vec{H}_0^S}{dt} &= (\vec{\Omega}_F \times \vec{\rho}_c) \times \vec{V}_0 m + \vec{M}_0 + \vec{\rho}_c \times \vec{g}m - \vec{h}_{0r} - \frac{d_r \vec{H}_{0r}}{dt} - 2 \int \vec{\rho} \times (\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_r) dm \end{aligned}$$

Na desnoj strani u prvoj jednadžbi, osim stvarnih vanjskih sila, pojavljuje se i jedna dopunska sila koju nazivamo **pogonska** sila  $\vec{F}_R$ :

$$\vec{F}_R = -\vec{k}_r - \frac{d_r \vec{Q}_r}{dt} - 2\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_{Cr} m. \quad 6.50$$

Isto tako u drugoj se jednadžbi, osim stvarnih vanjskih momenata, pojavljuje i jedan dopunski koji nazivamo **pogonski moment**:

$$\vec{M}_0^R = -\vec{h}_{0r} - \frac{\delta \vec{H}_{0r}}{dt} - 2 \int \vec{\rho} \times (\vec{\Omega}_F \times \vec{V}_r) dm. \quad 6.51$$

Prvi član na desnoj strani posljedica je ishodišta izvan središta mase. Ako je ishodište relativnog koordinatnog sustava postavljeno u središtu mase očvrstnute letjelice (sustava S), onda je  $\vec{\rho}_c = 0$  pa taj član ne postoji. Isto tako neće postojati ni moment sile Zemljane teže za ishodište (treći član na desnoj strani).

Uvrstimo li izraz za reaktivnu silu i reaktivni moment u jednadžbe za derivaciju količine gibanja i kinetičkog momenta očvrstnute letjelice, dobivamo:

$$\frac{d\vec{Q}^S}{dt} = \vec{R} + \vec{g}m + \vec{F}_R \quad 6.52$$

$$\frac{d\vec{H}_0^S}{dt} = (\vec{\Omega}_F \times \vec{\rho}_c) \times \vec{V}_0 m + \vec{M}_0 + \vec{\rho}_c \times \vec{g}m + \vec{M}_0^R \quad 6.53$$

Ako smo koordinatni sustav vezali za kontrolnu površinu, onda u ovoj jednadžbi imamo vektore  $\vec{k}_F$  i  $\vec{h}_{0F}$  koji ovise o protoku kroz kontrolnu površinu, ali je tada obično  $\vec{V}_{Cr} \neq 0$ , a relativna derivacija relativne količine gibanja i relativnog kinetičkog momenta jesu derivacije



količine gibanja i kinetičkog momenta čestica koje se gibaju u odnosu na tijelo letjelice, dok je tijelo letjelice nepomično.

Suprotno tomu, ako smo koordinatni sustav vezali za središte mase, onda su  $\vec{k}_r$  i  $\vec{h}_{0r}$  relativne derivacije relativne količine gibanja i relativnog kinetičkog momenta, kroz kontrolnu površinu, koje su različite od  $\vec{k}_F$  i  $\vec{h}_{0F}$ , ali najviše se razlikuju relativne derivacije relativnog gibanja i kinetičkog momenta jer sve čestice tijela imaju relativnu brzinu u odnosu na središte mase, no tada je  $\vec{V}_{C_r} = 0$  i  $\vec{\rho}_c = 0$ . U tom se slučaju druga vektorska jednadžba gibanja znatno pojednostavnjuje:

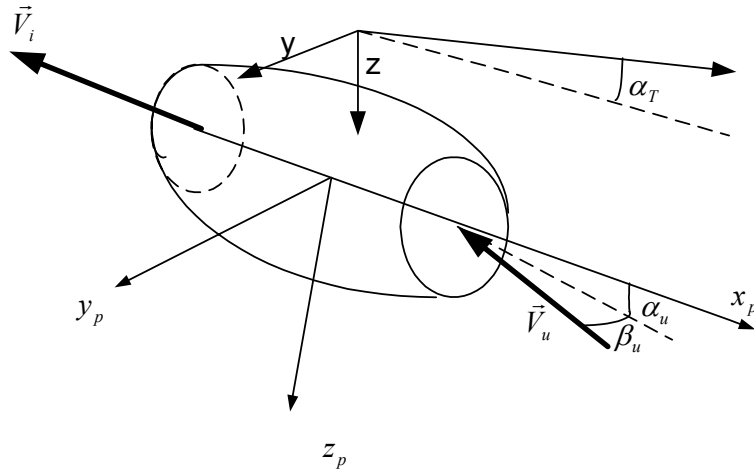
$$\frac{d\vec{H}_C^S}{dt} = \vec{M}_C + \vec{M}_C^R. \quad 6.54$$

## 6.4 Pogonska sila i moment mlaznog motora

Na letjelicu primijenit ćemo teoriju tijela promjenjive mase. Vanjska površina letjelice, na kojoj se nalaze ulazne površine usisnika  $S_u$  i izlazne površine mlaznica motora  $S_i$ , čine *kontrolnu površinu*. Promatrajmo slučaj letjelice s jednim motorom. Neka je  $x_p y_p z_p$  koordinatni sustav motora. Njegova ravnina  $x_p y_p$  neka je paralelna sa  $xy$  ravninom simetrije zrakoplova, a os  $x_p$  je ispod osi  $x$  zrakoplova za kut  $\alpha_T$ . Ulazna površina  $S_u$  okomita je na brzinu ulaza  $\vec{V}_u$ , a izlazna površina  $S_i$  okomita na os  $x$  motora, duž koje je izlazna brzina  $\vec{V}_i$ .

### 6.4.1 Napadni kut i kut klizanja motora

Za analizu pogonske sile i pogonskog momenta potrebni su kutovi  $\alpha_u$  i  $\beta_u$  dolazeće struje u odnosu na koordinatni sustav motora  $x_p y_p z_p$ .



Slika 6-3

Oni su jednaki kutovima aerodinamičke brzine umanjeni za savijanje  $\varepsilon_u$  i skretanje  $\sigma_u$  struje ispred elise ili usisnika, a kut  $\alpha_u$  umanjen je još za kut zakretanja motora  $\alpha_T$ :

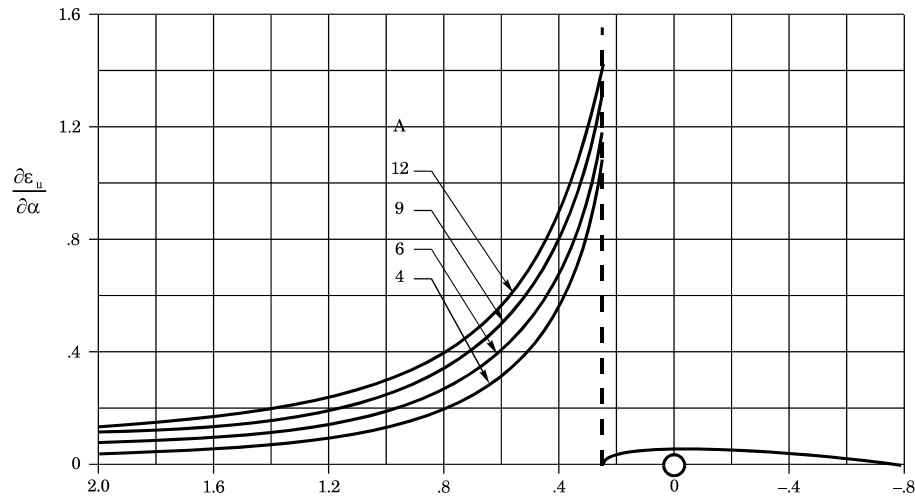
$$\begin{aligned}\alpha_u &= \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T \\ \beta_u &= \beta - \sigma_u\end{aligned}\quad 6.55$$

Koliko je to savijanje  $\varepsilon_u$  u ravnini simetrije i skretanje  $\sigma_u$  okomito na ravninu simetrije, mnogo ovisi o konfiguraciji zrakoplova. Ako je to zrakoplov koji ima pogon na prednjem dijelu trupa, onda nema ni savijanja ni skretanja zračne struje ( $\varepsilon_u = \sigma_u = 0$ ). Obrnuto ako su motori postavljeni na krilu, savijanje ispred krila  $\varepsilon_u$  ne treba zanemariti. Uzimamo da su savijanje i skretanje proporcionalni kutovima struje:

$$\begin{aligned}\varepsilon_u &= \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \alpha \\ \sigma_u &= \frac{\partial \sigma_u}{\partial \beta} \beta\end{aligned}\quad 6.56$$

Uz tu pretpostavku dobivamo kutove dolazeće struje:

$$\begin{aligned}\alpha_u &= \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T = \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \alpha - \alpha_T \\ \beta_u &= \beta - \sigma_u = \left(1 - \frac{\partial \sigma_u}{\partial \beta}\right) \beta\end{aligned}\quad 6.57$$



Slika 6-4.

Na slici 6-4 prikazan je dijagram koji omogućuje procjenu gradijenta savijanja struje paralelno ravnini simetrije letjelice, za razne vitkosti krila  $A$  u ovisnosti o udaljenosti koja je, izražena u tetivama od točke na prvoj četvrtini tetive. Bočno savijanje struje je malo. Osim toga, bočno savijanje struje na lijevoj strani suprotno je od savijanja na desnoj strani u odnosu na ravninu simetrije letjelice, te se efekti poništavaju. Zato obično zanemarujemo bočno savijanje struje i uzimamo da je  $\beta_u = \beta$ .

#### 6.4.2 Komponente pogonske sile

Prema teoriji mehanike tijela promjenljive mase iz odjeljka 6.3 pogonska sila motora je

$$\vec{F}_p = -\vec{k}_r - \frac{d_r \vec{Q}_r}{dt} - 2\vec{\Omega}_F \times (\vec{v}_C)_r m, \quad 6.58$$

gdje je

$$\vec{k}_r = \lim \frac{\Delta \vec{Q}_{ri} - \Delta \vec{Q}_{ru}}{\Delta t}. \quad 6.59$$

Ove jednadžbe su opće. Primijenit ćemo ih na pogon zrakoplova koji ima jedan ili više parova simetrično raspoređenih mlaznih motora. Pretpostavljamo da je istjecanje plinova duž  $x_p$  koja s  $x$  osom letjelice čini kut  $\alpha_T$  u ravni ni paralelnoj s ravninom simetrije letjelice.

Ako je rad motora stacionaran, onda je derivacija količine relativnog gibanja ukupne mase plinova koji se nalaze u motoru od ulaza do izlaza jednaka nuli:

$$\frac{d_r \vec{Q}_r}{dt} = 0$$

Relativna brzina promjene položaja središta mase letjelice  $(\vec{V}_c)_r$ , mala je pa je zanemarujemo:

$$(\vec{V}_c)_r \approx 0$$

U tom slučaju koji nas zanima bit će jednadžba pogonske sile:

$$\vec{F}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ru} - \Delta \vec{Q}_{ri}}{\Delta t} \quad 6.60$$

Kroz dio kontrolne površine  $S_u$ , tijekom vremena  $\Delta t$  ulazi masa  $(\vec{V}_u \Delta t \vec{S}_u \rho_u)$ . Ta masa je uvijek pozitivna pa treba uzeti apsolutnu vrijednost ovog skalarnog produkta.

Relativna količina gibanja zraka bit će  $\Delta \vec{Q}_{ru} = \vec{V}_u |\vec{V}_u \Delta t \vec{S}_u \rho_u|$ .

U istom vremenu  $\Delta t$  kroz izlaznu površinu  $S_i$  motora izlazi masa  $\vec{V}_i \Delta t \vec{S}_i \rho_i$  koja je također uvijek pozitivna, pa treba i tu uzeti apsolutnu vrijednost. Količina gibanja produkta izgaranja bit će  $\Delta \vec{Q}_{ri} = \vec{V}_i (\vec{V}_i \Delta t \vec{S}_i \rho_i)$ , gdje je  $\rho_i$  specifična masa produkta izgaranja na izlazu iz motora. U tim uvjetima limesi u jednadžbi pogonske sile lako se nalaze:

$$\vec{F}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}_{ru} - \Delta \vec{Q}_{ri}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_u |\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| \rho_u \Delta t}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_i |\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| \rho_i \Delta t}{\Delta t}$$

pa je

$$\vec{F}_p = \vec{V}_u |\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| \rho_u - \vec{V}_i |\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| \rho_i. \quad 6.61$$

Relativna brzina zraka na usisniku  $\vec{V}_u$  jednaka je po veličini i smjeru aerodinamičkoj brzini  $V$ , ali je u suprotnom smjeru. Neka su  $\alpha_p$  i  $\beta_p$  napadni kut i kut klizanja ulazne brzine  $\vec{V}_u$  u odnosu na koordinatni sustav  $x_p y_p z_p$ . Intenzitet ulazne brzine pretpostavit ćemo da je jednak aerodinamičkoj brzini. Tada su komponente ulazne brzine u koordinatnom sustavu pogona  $x_p y_p z_p$ :

$$\mathbf{V}_u^p = [-V \cos \beta_u \cos \alpha_u \quad -V \sin \beta_u \quad -V \cos \beta_u \sin \alpha_u]^T, \quad 6.62$$

gdje su, kao što smo to vidjeli u prethodnom odjeljku, kutovi  $\alpha_u$  i  $\beta_u$  određeni jednadžbama (6.57). Kako su ti kutovi uvijek mali,

$$\mathbf{V}_u^p = [-V \quad -V \beta_u \quad -V \alpha_u]^T. \quad 6.63$$

Vektor  $\vec{S}_u$  je okomit na osi  $x_p$  i usmjeren prema van. Zato je

$$\mathbf{S}_u^p = [S_u \quad 0 \quad 0]^T. \quad 6.64$$

S tim vrijednostima u koordinatnom sustavu  $x_p, y_p, z_p$  nalazimo skalarni produkt:

$$|\vec{V}_u \cdot \vec{S}_u| = |\mathbf{V}_u^p \cdot \mathbf{S}_u^p| = VS_u \quad 6.65$$

Brzina istjecanja produkta izgaranja  $\vec{V}_i$  ima intenzitet  $U$  u pravcu osi mlaznice motora (okomito na izlaznu površinu), te je

$$\mathbf{V}_i^p = [-U \quad 0 \quad 0]^T, \quad 6.66$$

jer je smjer istjecanja suprotan smjeru osi  $x_p$ . Isto tako vektor izlazne površine  $\vec{S}_i$  je u pravcu osi  $x_p$ , ali suprotnog smjera  $\mathbf{S}_i^p = [-S_i \quad 0 \quad 0]^T$ . Tako je skalarni produkt:

$$|\vec{V}_i \cdot \vec{S}_i| = |\mathbf{V}_i^p \mathbf{S}_i^p| = US_i \quad 6.67$$

S tim skalarnim produktima bit će vektorska jednadžba pogonske sile:

$$\vec{F}_p = -\vec{V}_u(VS_u)\rho_u - \vec{V}_i(US_i)\rho_i, \quad 6.68$$

ili njen matrični oblik

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{V}_u^p(VS_u\rho_u) - \mathbf{V}_i^p(US_i\rho_i). \quad 6.69$$

Komponente pogonske sile u koordinatnom sustavu pogona  $x_p, y_p, z_p$  lako nalazimo jer su nam sve veličine poznate:

$$\begin{bmatrix} F_X^p \\ F_Y^p \\ F_Z^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \\ -V\beta_u \\ -V\alpha_u \end{bmatrix} (VS_u\rho_u) - \begin{bmatrix} -U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (US_i\rho_i). \quad 6.70$$

Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned} F_{pi} &= U^2 S_i \rho_i \\ F_{pu} &= V^2 S_u \rho_u \end{aligned} \quad 6.71$$

Uz te oznake bit će komponente pogonske sile duž osi pogonske grupe:

$$\begin{aligned} F_X^p &= F_{pi} - F_{pu} \\ F_Y^p &= -F_{pu} \beta_u \\ F_Z^p &= -F_{pu} \alpha_u \end{aligned} \quad 6.72$$

Komponenta duž ose motora  $F_X^p$  predstavlja pogonsku silu motora. Ona se obično označava sa  $T$ .

$$T = U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u. \quad 6.73$$

Pored te aksijalne sile pojavljuju se i dvije bočne komponente u ravnini okomitoj na ulaz u motor koje su proporcionalne ulaznim kutovima

$$\begin{aligned} F_Y^P &\approx -F_{pu}\beta_u \\ F_Z^P &\approx -F_{pu}\alpha_u \end{aligned} \quad 6.74$$

### 6.4.3 Komponente pogonskog momenta

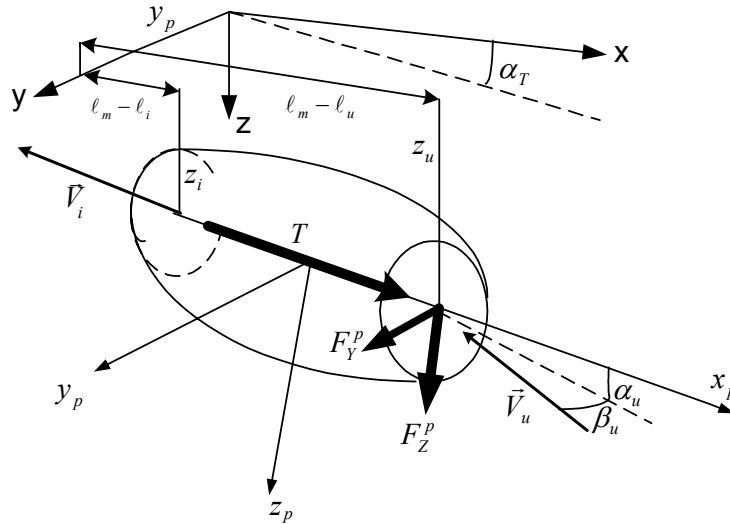
Hvatišta bočnih komponenata  $F_{pu}\beta_u$  i  $F_{pu}\alpha_u$  uzimamo u središtu ulaza

$$\mathbf{r}_{ru} = [\ell_m - \ell_u \quad y_u \quad z_u]^T, \quad 6.75$$

a hvatište aksijalne sile određujemo kao hvatište rezultate od dviju komponenata aksijalne sile:

$$U^2 S_i \rho_i \text{ s hvatištem u središtu izlaza } \mathbf{r}_{ri} = [(\ell_m - \ell_i) \quad y_i \quad z_i]^T \text{ i}$$

$$V^2 S_u \rho_u \text{ s hvatištem u središtu ulaza } \mathbf{r}_{ru} = [\ell_m - \ell_u \quad y_u \quad z_u]^T.$$



Slika 6-5

pa su koordinate hvatišta pogonske komponente  $T$

$$\begin{aligned} (\ell_m - \ell_p) &= \frac{(\ell_m - \ell_i) \cdot U^2 S_i \rho_i - (\ell_m - \ell_u) \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u} \\ y_p &= \frac{y_i \cdot U^2 S_i \rho_i - y_u \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u} \\ z_p &= \frac{z_i \cdot U^2 S_i \rho_i - z_u \cdot V^2 S_u \rho_u}{U^2 S_i \rho_i - V^2 S_u \rho_u}. \end{aligned} \quad 6.76$$

Vektor položaja hvatišta aksijalne sile označavamo sa:

$$\mathbf{r}_{rp} = [\ell_m - \ell_p \quad y_p \quad z_p]^T. \quad 6.77$$

Uz te oznake bit će komponente momenta pogonske sile

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_{ip} \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_{ru} \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{pu} \beta_u \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}. \quad 6.78$$

Velika je razlika u intenzitetu aksijalne komponente  $T$  i bočnih komponentata  $\beta_u F_{pu}$  i  $\alpha_u F_{pu}$ , te njih možemo smatrati malim veličinama u odnosu na aksijalnu komponentu. Postavni kut motora  $\alpha_T$  obično je isto mali kut, pa je opravdano izjednačiti bočne komponente u koordinatnom sustavu motora i letjelice.

$$\mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{pu} \beta_u \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{pu} \beta_u \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix}$$

pa gornja jednadžba 6.78 ima oblik:

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_{ip} \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_{ru} \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{pu} \beta_u \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix} \quad 6.79$$

Kako je  $\mathbf{L}_{FP} = \mathbf{L}_X(\alpha_T)$  bit će komponente pogonskog momenta u koordinatnom sustavu letjelice:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_p & y_p \\ z_p & 0 & -(\ell_m - \ell_p) \\ -y_p & (\ell_m - \ell_p) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_T & 0 & -\sin \alpha_T \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_T & 0 & \cos \alpha_T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -z_u & y_u \\ z_u & 0 & -(\ell_m - \ell_u) \\ -y_u & (\ell_m - \ell_u) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{pu} \beta_u \\ -F_{pu} \alpha_u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 6.80$$

Množenjem dobivamo:

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_p T \sin \alpha_T \\ z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) T \sin \alpha_T \\ -y_p T \cos \alpha_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_u F_{pu} \alpha_u + z_u F_{pu} \beta_u \\ (\ell_m - \ell_u) F_{pu} \alpha_u \\ -(\ell_m - \ell_u) F_{pu} \beta_u \end{bmatrix}. \quad 6.81$$

U ovim jednadžbama treba uočiti nekoliko činjenica.

- Prvo, bočne komponente pogonske sile  $\beta_u F_{pu}$  i  $\alpha_u F_{pu}$  znatno su manje od aksijalne komponente pogonske sile  $T$ , pa su i momenti koje one stvaraju isto tako znatno manji od momenata aksijalne sile.
- Drugo, ako postoji jedan središnji motor, onda je za njega  $y_p = y_u = 0$ . Komponente pogonskog momenta u tom slučaju imaju oblik:

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) T \sin \alpha_T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_u F_{pu} \beta_u \\ (\ell_m - \ell_u) F_{pu} \alpha_u \\ -(\ell_m - \ell_u) F_{pu} \beta_u \end{bmatrix}. \quad 6.82$$

- Treće, u slučaju više motora, uvijek se za par motora članovi koji sadrže  $y_p$  i  $y_u$  skrate, jer je za jedan motor pozitivno, a za drugi negativno. To znači da je gornja jednadžba upotrebljiva za veći broj motora, samo što se članovi trebaju onoliko puta zbrojiti koliko ima motora.
- Četvrto, ako je u paru otkazao jedan motor, onda je komponenta oko osi  $z$

$$N^F = -y_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_u) \cdot F_{pu} \beta_p \quad 6.83$$

- Peto, pogonski moment propinjanja  $M^F$

$$M^F = z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) T \sin \alpha_T + (\ell_m - \ell_u) F_{pu} \alpha_u \quad 6.84$$

linearna je funkcija po napadnom kutu, jer je prema jednadžbi 6.55

$$\alpha_u = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T = \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \alpha - \alpha_T,$$

pa je

$$M^F = M_0^F + M_\alpha^F \alpha \quad 6.85$$

gdje su:

$$\begin{aligned} M_0^F &= z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) T \sin \alpha_T - (\ell_m - \ell_u) F_{pu} \alpha_T \\ M_\alpha^F &= (\ell_m - \ell_u) F_{pu} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right). \end{aligned} \quad 6.86$$

#### 6.4.4 Raspoloživa sila mlaznog motora

Aksijalna komponenta  $T$  duž osi motora može se mijenjati otklonom  $\delta_T$ . Za najveću vrijednost tog otklona imamo maksimalnu ili raspoloživu pogonsku silu  $T_a$ . Da ne bi došlo



do zabune u oznakama označit ćemo raspoloživu pogonsku silu sa  $F$ , a temperaturu zraka sa  $T$ . Ta raspoloživa sila mlaznog motora  $F$  ovisi o karakteristikama zraka. Prema Cohenu [17], sila mlaznog motora ovisi o tlaku  $p$  i temperaturi  $T$  preko bezdimenzijskih veličina: odnosa

tlaka na visini i tlaka pri zemlji  $\frac{p}{p_0}$ , odnosa temperature pri zemlji i na visini  $\frac{T_0}{T}$  i o

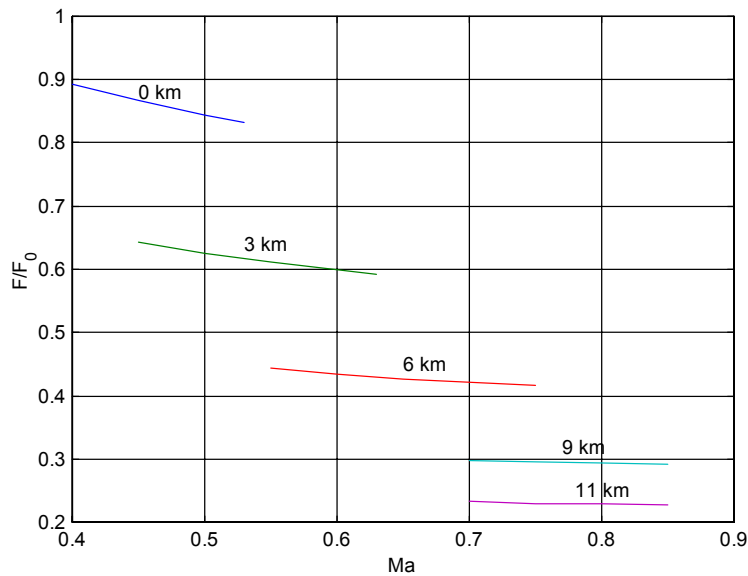
Machovu broju, kao i o kutnoj brzini motora  $\omega$ :

$$F = \frac{p}{p_0} f_1 \left( \omega \sqrt{\frac{T_0}{T}}, Ma \right)$$

O tim parametrima također ovisi i potrošnja goriva (masa goriva potrošena u jedinici vremena)

$$FC = \frac{p}{p_0} \sqrt{\frac{T}{T_0}} f_2 \left( \omega \sqrt{\frac{T_0}{T}}, Ma \right)$$

Prema tome i potrošnja goriva mijenjat će se obzirom na visinu. U standardnoj atmosferi na određenoj visini možemo je predstaviti kao funkciju Machova broja. Proizvođač obično daje tu ovisnost u obliku dijagrama kao na slici 8-4.



Slika 6-6

Takav dijagram treba aproksimirati nekim funkcijama koje su usklađene u intervalima uporabe motora. Jedna od mogućih je eksponencijalna funkcija po Machovom broju

$$\frac{F}{F_0} = A \cdot Ma^{-n}$$

u kojoj je  $F_0$  sila mlaznog motora na razini mora u statičkim uvjetima, a konstante  $A$  i  $n$  ovise o visini. Moguće je krivulju  $F(Ma)$  za određenu visinu dijagram aproksimirati polinom

$$F = a_n Ma^n + a_{n-1} Ma^{n-1} + \dots + a_1 Ma + a_0$$

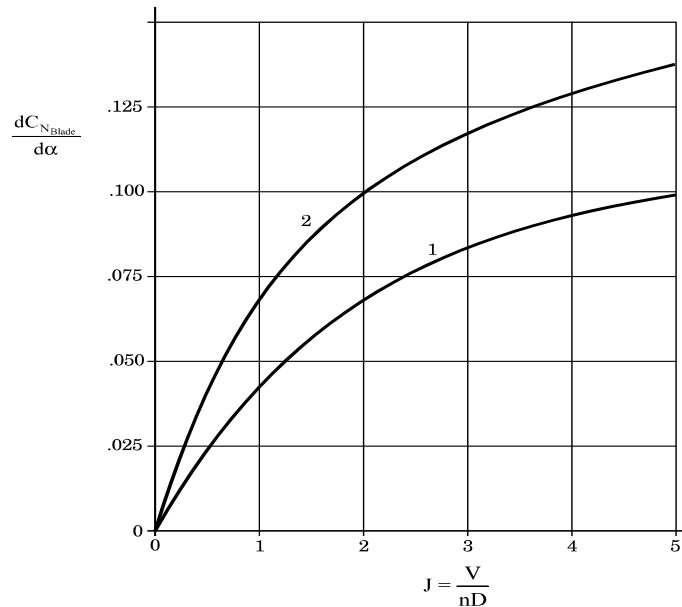
s tim da red polinoma  $n$  ne bude veći od 4. U tom slučaju koeficijenti polinoma ovise o visini.

## 6.5 Pogonska sila i moment elisnog motora

### 6.5.1 Komponenta pogonske sile u ravnini diska elise

I u slučaju elise postoji sila u ravnini diska elise, koja je proporcionalna kutu između dolazeće zračne struje i osi rotacije elise. Eksperimentalno je utvrđeno da je taj koeficijent proporcionalnosti

$$F_{p\sigma} = \frac{\rho V^2}{2} N_B S_p \frac{\partial C_{Nblade}}{\partial \alpha} f(T), \quad 6.87$$



Slika 6-7 Krivulja 1 za obične elise, krivulja 2 za široke elise tipa *turbomlazni*

gdje su:

$S_p$  površina diska elise,

$N_B$  broj ploštica u elisi,

$\frac{\partial C_{Nblade}}{\partial \alpha}$  gradijent ploštice elise prema dijagramu na slici 6-7, a korak  $J = \frac{V}{nD}$ ;  $n$  broj

okretaja elise u sekundi, a  $D$  promjer diska elise.

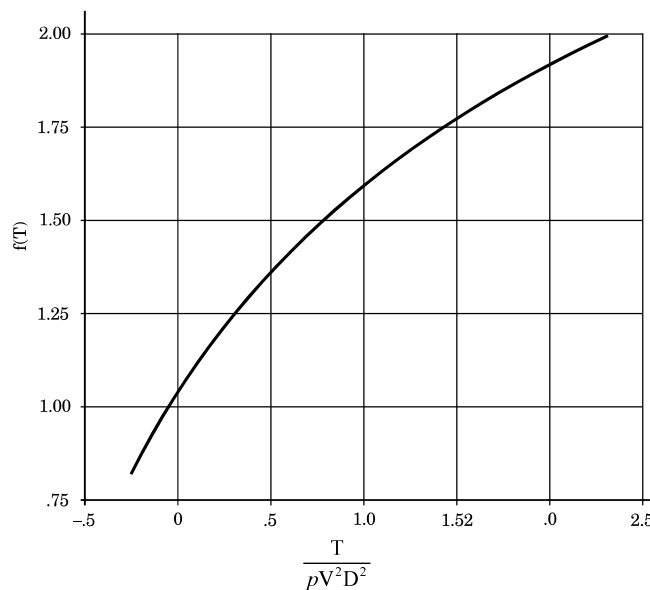
$f(T)$  funkcija pogonske sile elise prema dijagramu na slici 6-8, na kome je bezdimenzijski

Aerodinamička brzina na ulazu u disk elise ima napadni kut  $\alpha_p$  i kut klizanja  $\beta_p$ . Međutim i osa elisnog motora može biti pod kutom  $\alpha_T$  u odnosu na os letjelice, a može postojati i povijanje stuje ispred elise (npr. u slučaju potisne elise) pa je u tom slučaju napadni kut

$$\alpha_p = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T. \quad 6.88$$

Oba ta kuta stvaraju sile okomite na os rotacije elise, tj. u ravnini diska čije su komponente duž koordinatnog sustava pogona:

$$\begin{aligned} F_Y &= -F_{p\sigma}\beta_p \\ F_Z &= -F_{p\sigma}\alpha_p \end{aligned}$$



Slika 6-8

Prema tome, komponente pogonske sile u slučaju elisnog motora duž osi tromosti zrakoplova jesu :

$$\mathbf{L}_Y(\alpha_T) \cdot [T \quad -F_{p\sigma}\beta_p \quad -F_{p\sigma}\alpha_p]^T, \quad 6.89$$

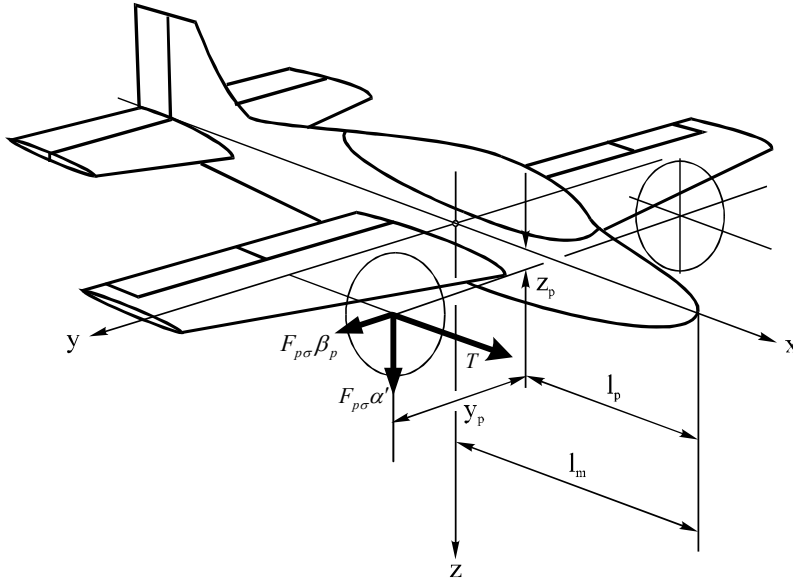
Uočimo da je to potpuno isti oblik jednadžba kao i kod mlaznog motora. Razlika je što je kod mlaznog motora  $F_{pu} = V^2 S_u \rho_u$ , a ovdje je  $F_{p\sigma}$  određeno gornjom jednadžbom

### 6.5.2 Komponente momenta pogonske sile elise

Te komponente pogonske sile stvaraju momente oko središta mase. Neka su, kao na slici 6-9,

$$\begin{bmatrix} \ell_m - \ell_p & y_p & z_p \end{bmatrix}^T$$

koordinate središta diska elise u koordinatnom sustavu letjelice, gdje je  $\ell_p$  udaljenost diska elise od vrha letjelice, a  $\ell_m$  udaljenost središta mase isto od vrha letjelice.



Slika 6-9. Bočne sile elise

Komponente pogonske sile u koordinatnom sustavu letjelice dobivamo poslije transformacije zbog zaokrenutog koordinatnog sustava pogona za kut  $\alpha_T$

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_{ip} \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_{ru} \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{p\sigma}\beta_p \\ -F_{p\sigma}\alpha_p \end{bmatrix}.$$

Kao i u slučaju mlaznih motora bočne komponente  $\beta_u F_{pu}$  i  $\alpha_u F_{pu}$  male su sile u odnosu na aksijalnu komponentu  $T$ , te njih smatramo malim veličinama u odnosu na  $T$ . Postavni kut motora  $\alpha_T$  isto je mala veličina, pa zanemarujući male veličine drugog reda bit će:

$$\mathbf{M}_C^F = \tilde{\mathbf{r}}_{ip} \mathbf{L}_{FP} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{r}}_{ru} \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{p\sigma}\beta_p \\ -F_{p\sigma}\alpha_p \end{bmatrix}. \quad 6.90$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_p T \sin \alpha_T \\ z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) T \sin \alpha_T \\ -y_p T \cos \alpha_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_p F_{p\sigma} \alpha_p + z_p F_{p\sigma} \beta_p \\ (\ell_m - \ell_p) F_{p\sigma} \alpha_p \\ -(\ell_m - \ell_p) F_{p\sigma} \beta_p \end{bmatrix} \quad 6.91$$

Kao i u slučaju mlaznog motora i ovdje ima nekoliko važnih napomena:

- Ako postoji samo jedna središnja elisa, onda je  $y_p = 0$ , pa nestaju članovi sa  $y_p$ , a ako je više elisa, onda treba zbrojiti komponente svih elisa. Tada će se članovi sa  $y_p$  skratiti jer elisi s desne strane odgovara ista s lijeve strane:

$$\begin{aligned} L^F &= z_p F_{p\sigma} \beta_p \\ M^F &= z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) (T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} \alpha_p) \\ N^F &= -(\ell_m - \ell_p) F_{p\sigma} \beta_p. \end{aligned} \quad 6.92$$

- U slučaju otkaza jednog motora komponenta momenta  $N^F$  vrlo je snažna:

$$N^F = -y_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) F_{p\sigma} \beta_p. \quad 6.93$$

- Moment propinjanja je linearna funkcija napadnog kuta

$$M^F = M_0^F + M_\alpha^F \alpha, \quad 6.94$$

gdje je

$$\begin{aligned} M_0^F &= z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) (T \sin \alpha_T + F_{p\sigma} \alpha_T) \\ M_\alpha^F &= (\ell_m - \ell_p) F_{p\sigma} \left( 1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad 6.95$$

jer je  $\alpha_p = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T$ .

### 6.5.3 Primjer

Za mali putnički zrakoplov iz odjeljka 5 odrediti normalnu komponentu i moment propinjanja pogonske sile, ako je  $\alpha_T = 4.5^\circ$

Za korak elise

$$J = \frac{V}{nD} = \frac{45}{40 \cdot 1.88} = 0.60$$

gradijent ploščice elise je

$$\frac{\partial C_{N \text{ blade}}}{\partial \alpha} = 0.030$$

a za bezdimenzijsku pogonsku silu koja je jednaka otporu zrakoplova

$$T^* = \frac{T}{\rho V^2 D^2} = \frac{1}{2} \frac{S_{ref} (C_{D0} + K C_L^2)}{D^2} = \frac{15.1 \cdot (0.0231 + 0.104 \cdot 0.694^2)}{2 \cdot 1.88^2} = 0.231$$

S tim vrijednostima je gradijent normalne sile

$$\frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} = N_B \frac{S_p}{S_{ref}} \frac{\partial C_{Nblade}}{\partial \alpha} f(T^*) = 2 \frac{(1.88/2)^2 \pi}{15.1} \cdot 0.030 \cdot 1.203 = 0.0132$$

Ispred elise nema savijanja struje ( $\alpha_p = \alpha - \alpha_T$ ) te je s ovim gradijentom normalna komponenta pogonske sile:

$$-\frac{F_{p\sigma} \alpha_p}{q_\infty S_{ref}} = -\frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} (\alpha - \alpha_T) = -0.0132 \cdot (\alpha - 0.078) = 0.00103 - 0.0132 \cdot \alpha$$

Moment propinjanja od elise prema jednadžbi 6.92 bit će:

$$M^F = z_p T \cos \alpha_T - (\ell_m - \ell_p) (T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} \alpha_p).$$

Os motora prolazi kroz središte mase te je  $z_p = 0$ , pa će komponenta propinjanja pogonskog momenta biti:

$$M^F = -(\ell_m - \ell_p) [T \sin \alpha_T - F_{p\sigma} (\alpha - \alpha_T)].$$

ili

$$\frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = \frac{(\ell_m - \ell_p)}{c_A} \left[ -(C_{D0} + K \cdot C_L^2) \cdot \sin \alpha_T + \frac{F_{p\sigma}}{q_\infty S_{ref}} (\alpha - \alpha_T) \right]$$

$$\frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = \left( \frac{1.719}{1.698} - 0 \right) \left[ -(0.0231 + 0.104 \cdot 0.694^2) \cdot 0.078 + 0.0132 \cdot (\alpha - 0.078) \right]$$

$$= 0.0132 \cdot \alpha - 0.0068$$