

## 7 RAVNOTEŽNI LET I NJEGOVA STABILNOST

Zrakoplovi imaju tzv. polarno upravljanje. Trebaju li u nekoj ravnini učiniti zaokret, a to znači promijeniti pravac brzine u toj ravnini, oni to ostvaruju vektorskom razlikom sile uzgona i težine, tj. jedan dio sile uzgona služi za kompenzaciju težine, a drugi za promjenu pravca vektora brzine. Zato se zrakoplovi moraju zavaljati da bi postavili silu uzgona tamo gdje treba, a istodobno povećali silu uzgona koliko treba. Odatle slijedi da je problem *upravljivosti* pitanje veličine sile uzgona koju zrakoplov može ostvariti. Kao mjera upravljivosti može se upotrebljavati ili maksimalna sila uzgona ili prirast sile uzgona za jedinični prirast otklona kormila visine.

### 7.1 Ravnotežni let

#### 7.1.1 Definicija ravnotežnog leta

Ravnotežni let ili istrimana letjelica, kako se često govori, znači da su momenti koji djeluju oko središta mase letjelice u ravnoteži, tj. da je rezultirajući moment jednak nuli. U tom slučaju letjelica se neće okretati, ili ako ima neku kutnu brzinu neće je mijenjati, jer momenti za središte mase mijenjaju kutnu brzinu. U većini slučajeva let transportnih zrakoplova odvija se u ovim uvjetima ili vrlo blisko njima. Prema tome, možemo reći da u ravnotežnom letu mora biti:

$$M = 0$$

$$N = 0$$

$$L = 0$$

U ravnotežnom letu razmatramo dva pojma: statičku stabilnost i upravljivost.

#### 7.1.2 Zbroj pogonske i aerodinamičke sile i momenta

Tražimo komponente zbroja pogonske sile i aerodinamičke sile duž osi aerodinamičkog koordinatnog sustava u letu bez kuta klizanja ( $\beta = 0$ ). Zato trebamo naći komponente obiju sila u tom koordinatnom sustavu. Pogonska sila ima komponente duž osi pogona prema prethodnom poglavlju

$$\begin{aligned} F_X^p &= T \\ F_Y^p &= -F_p \beta_p \\ F_Z^p &= -F_p \alpha_p, \end{aligned} \quad 7.1$$

Ako je pogon s elisom onda je

$$F_p = F_{p\sigma} = \frac{\rho V^2}{2} N_B S_p \frac{\partial C_{N blade}}{\partial \alpha} f(T), \quad 7.2$$

a kad je riječ o mlaznim motorima, onda je

$$F_p = F_{pu} = V^2 S_u \rho_u. \quad 7.3$$

Da bi ove komponente pogonske sile preneli u aerodinamički koordinatni sustav potrebna nam je matrica transformacije u aerodinamički koordinatni sustav iz pogonskog. Tu matricu nalazimo lako na temelju već određenih matrica.

$$\mathbf{L}_{AP} = \mathbf{L}_{AF} \mathbf{L}_{FP} = \mathbf{L}_Y(-\alpha) \cdot \mathbf{L}_Y(\alpha_T) = \mathbf{L}_Y(\alpha_T - \alpha) \quad 7.4$$

Konstrukcijom zrakoplova motor se postavlja tako da u ravnotežnom horizontalnom letu bude  $\alpha_T = \alpha_{rav}$ , pa je matrica  $\mathbf{L}_Y(\alpha_T - \alpha) = \mathbf{J}$ . Kad nije tako, bit će ta razlika mala pa je matrica približno jednaka jediničnoj matrici. Uz tu činjenicu dobivamo tražene komponente pogonske sile:

$$\begin{bmatrix} F_X^P \\ F_Y^P \\ F_Z^P \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{AP} \begin{bmatrix} T \\ -F_p \beta_p \\ -F_p \alpha_p \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} T \\ -F_p \beta_p \\ -F_p \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ -F_p \beta_p \\ -F_p \alpha_p \end{bmatrix} \quad f7.5$$

Komponentu  $F_Z^A$  zbrojit ćemo s aerodinamičkom silom uzgona. Budući da smo u aerodinamici odredili normalnu silu zrakoplova, silu uzgona zrakoplova dobit ćemo transformacijom:

$$\begin{bmatrix} -C_D \\ 0 \\ -C_L^A \end{bmatrix} = \mathbf{L}_Y(-\alpha) \begin{bmatrix} -C_A \\ 0 \\ -C_N \end{bmatrix}$$

Iz toga slijedi:

$$C_L^A = C_N \cos \alpha - C_A \sin \alpha$$

$$C_L^A = C_{N0} + (C_{N\alpha} - C_A) \cdot \alpha + C_{N\delta} \delta_m$$

Kako je uzgon suprotnog smjera od aerodinamičke osi z, trebamo dodati pogonsku komponentu sili uzgona, te je konačno

$$C_L = C_{N0} + (C_{N\alpha} - C_A) \cdot \alpha + C_{N\delta} \delta_m + \frac{F_p \alpha_p}{q_\infty S_{ref}}$$

Kako je  $\alpha_p = \alpha - \varepsilon_u - \alpha_T$  (jednadžba 6.57 i 6.88) bit će poslije zamjene

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha + C_{L\delta} \delta_m, \quad 7.6$$

gdje je

$$\begin{aligned}
C_{L0} &= C_{N0} - \frac{F_p \alpha_T}{q_\infty S_{ref}} \\
C_{L\alpha} &= (C_{N\alpha} - C_A) + \frac{F_p}{q_\infty S_{ref}} (1 - \varepsilon_{u\alpha}) \\
C_{L\delta} &= C_{N\delta} .
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Komponente zbroja pogonskog i aerodinamičkog momenta trebamo duž osi letjelice. I jedan i drugi moment već smo odredili upravo duž tih osi, te sada ih treba samo zbrojiti. Pogonski moment propinjanja u oba slučaja (za mlazni jednadžbe 6.86, a za elisni 6.95) također ima isti oblik,

$$M^F = M_0^F + M_\alpha^F \alpha$$

Uočimo da veličina  $M_0^F$  može biti i pozitivna i negativna, a da predznak  $M_\alpha^F$  ovisi o tomu je li usisnik, odnosno elisa, ispred ili iza središta mase zrakoplova. Gradijen  $M_\alpha^F$  je isti po obliku pa možemo koristiti zajedničku jednadžbu

$$M_\alpha^F = (\ell_m - \ell_p) F_p \left( 1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right). \tag{7.8}$$

Pretpostavimo da nema kutne brzine ili su male te ih možemo zanemariti, što je slučaj u ravnotežnom letu. U tom slučaju aerodinamički moment propinjanja ima oblik:

$$M^A = q S c_A (C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta_m} \delta_m) \tag{7.9}$$

Rezultirajući moment propinjanja, koji je zbroj pogonskog i aerodinamičkog momenta propinjanja, imat će oblik

$$M = M_0 + M_\alpha \alpha + M_\delta \delta_m, \tag{7.10}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
M_0 &= M_0^F + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m0} \\
M_\alpha &= M_\alpha^F + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m\alpha} \\
M_\delta &= \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} c_A C_{m\delta}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Derivativi momenta propinjanja  $C_{m\alpha}$  i  $C_{m\delta_m}$  nisu samo funkcije Machova broja već ovise i o napadnom kutu i otklonu kormila visine zbog savijanja struje i zbog nelinearnosti gradijenta normalne sile krila. Ta ovisnost derivativa  $C_{m\alpha}$  i  $C_{m\delta_m}$  o napadnom kutu i otklonu kormila visine za normalne zrakoplovne sheme može se zanemariti (ako napadni kut nije velik), ali u

slučaju zrakoplova sheme canard, koju imaju suvremeni borbeni zrakoplovi, treba uzeti u obzir tu nelinearnost.

### 7.1.3 Uzgon u ravnotežnom letu

Zbrajanjem komponenata pogona i aerodinamike, u općem slučaju na zrakoplov u letu djeluje moment propinjanja i sila uzgona. Oba vektora ovise o napadnom kutu i otklonu kormila visine

$$L = L_0 + L_\alpha \alpha + L_\delta \delta_m$$

$$M = M_0 + M_\alpha \alpha + M_{\delta_m} \delta_m$$

To su dvije familije krivulja, koje su prikazane na slici 7.1. Na toj slici položaji krivulja odgovaraju normalnoj shemi zrakoplova. Ovisnost sile uzgona  $L = f_L(\alpha, \delta_m)$  o napadnom kutu obično je funkcija bliska pravcu, a njihova međusobna udaljenost za različite otklone  $\delta_m$  ovisi o veličini upravljačkih površina. U slučaju subsoničnih zrakoplova, kada su kormila visine samo dio horizontalnog repa, one su vrlo bliske te se često zamjenjuju jednim pravcem. Nasuprot tomu, krivulje momenta propinjanja  $M = f_m(\alpha, \delta_m)$  za različite otklone kormila visine  $\delta_m$  uvijek su razmaknute. Za normalne zrakoplovne sheme te krivulje su približno linearne, a za konfiguracije tipa *canard* vrlo su nelinearne po napadnom kutu.

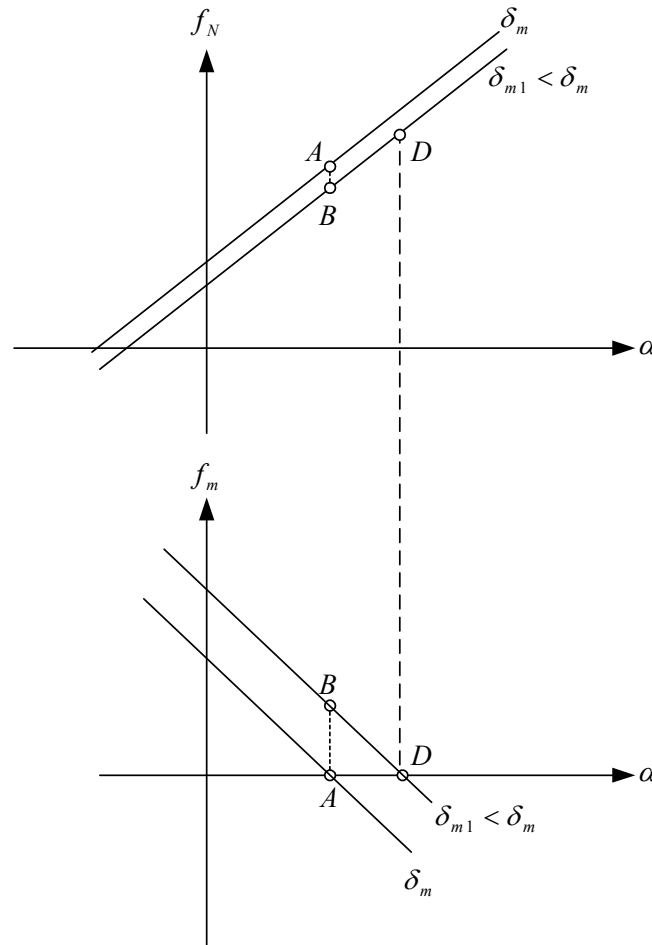
Pretpostavimo da letimo s otklonom  $\delta_m$  u ravnotežnom letu. Na donjem dijagramu slike 7-1 točka  $A$  predstavlja stanje u letu jer po definiciji u ravnotežnom letu moment propinjanja  $M_A$  je nula, a točka  $A$  se nalazi na krivulji  $M = f_m(\alpha, \delta_m)$  za zadano  $\delta_m$ . Iz te jednadžbe

$$M_A = M_0 + M_\alpha \alpha_{rav} + M_{\delta_m} \delta_m = 0 \quad 7.12$$

dobivamo ravnotežni napadni kut za postavljeni otklon kormila visine. Kada je moment propinjanja jednak nuli, onda je napadni kut jednak *ravnotežnom napadnom kutu*  $\alpha_{rav}$ . To znači da zadanom otklonu kormila visine  $\delta_m$ , u ravnotežnom letu, odgovara ravnotežni napadni kut:

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_{\delta_m} \delta_m}{-M_\alpha} \quad 7.13$$

U ravnotežnom letu sila uzgona predstavljena je odgovarajućom točkom  $A$  u gornjem dijelu dijagrama na slici 7-1:



Slika 7-1. Prijelaz iz jednog u drugu ravnotežni let

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m,$$

ili zamjenom za ravnotežni kut:

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m = L_0 + L_\alpha \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha} + L_\delta \delta_m$$

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \frac{M_0}{-M_\alpha} + \left( L_\alpha \frac{M_\delta}{-M_\alpha} + L_\delta \right) \delta_m \quad 7.14$$

Iz toga zaključujemo da u ravnotežnom letu sila uzgona ovisi isključivo o veličini otklona kormila pravca  $\delta_m$ .

Vidjeli smo da napadni kut u ravnotežnom letu ovisi o otklonu kormila visine. Tu ovisnost označavamo s  $\alpha_{rav}(\delta_m)$ . Iz gornje jednadžbe za ravnotežni napadni kut slijedi također da on ima dva dijela. Prvi dio  $M_0/(-M_\alpha)$  ne ovisi o otklonu kormila visine  $\delta_m$  i to je vrijednost napadnog kuta u ravnotežnom stanju kad je otklon kormila visine nula:

$$\alpha_{rav}(0) = \frac{M_0}{-M_\alpha}. \quad 7.15$$

Drugi dio je proporcionalan odklonu kormila visine. Taj koeficijent proporcionalnosti

$$K = -\frac{M_\delta}{M_\alpha} \quad 7.16$$

nazivamo aerodinamičko pojačanje (zajedno s njegovim predznakom). Predznak aerodinamičkog pojačanja može biti i pozitivan i negativan, što ovisi o aerodinamičkoj shemi. Za *canard* konfiguracije je  $M_\delta > 0$ ,  $M_\alpha < 0$ , pa je aerodinamičko pojačanje tih shema uvijek pozitivno. Nasuprot tomu, normalna konfiguracija zrakoplova ima  $M_\delta < 0$ , a  $M_\alpha$  može biti negativno ili pozitivno, pa i aerodinamičko pojačanje može biti pozitivno i negativno. S tim oznakama je ovisnost ravnotežnog napadnog kuta od odklona kormila visine:

$$\alpha_{rav}(\delta_m) = \alpha_{rav}(0) + K \cdot \delta_m \quad 7.17$$

#### 7.1.4 Normalno opterećenje

Budući da proučavamo zrakoplove koji su aerodinamički upravljivi, bitna je veličina sile uzgona i sposobnost zrakoplova da je mijenja jer se pomoću te sile upravlja zrakoplovom. Zato se odnos intenziteta sile uzgona prema težini zrakoplova naziva *normalno opterećenje* (*load factor*) i označava se sa skalarom  $n$  bez indeksa:

$$n = \frac{L}{W} \quad 7.18$$

Drugim riječima to znači da je faktor opterećenja veličina uzgona izražena u težinama letjelice. Međutim, taj koeficijent ima šire značenje. Da bismo razumjeli njegovo značenje, promatramo relativno gibanje mase  $m$  u zrakoplovu.

$$m\vec{a}_r = \vec{F}_{veze} + m\vec{g} - m\vec{a}_p - m\vec{a}_k;$$

- $\vec{F}_{veze}$  su sile veze koje djeluju na masu  $m$  u zrakoplovu,
- $\vec{a}_p$  je prijenosno ubrzanje koje je jednako apsolutnom ubrzanju one točke zrakoplova u kojoj se nalazi masa  $m$ ,
- $\vec{a}_k$  je Coriolisovo ubrzanje  $2\vec{\Omega} \times \vec{V}_r$ .

Ako masa  $m$  miruje u zrakoplovu, onda je relativno ubrzanje te mase  $\vec{a}_r = 0$  i njena relativna brzina  $\vec{V}_r = 0$ , te nema ni Coriolisova ubrzanja. Iz jednadžbe za relativno gibanje dobivamo da su sile veza koje djeluju na masu  $m$  proporcionalne prijenosnom ubrzanju:

$$\vec{F}_{veze} = m\vec{a}_p - m\vec{g}$$

Pretpostavimo da se mala masa  $m$  nalazi u središtu mase zrakoplova. Onda je prijenosno ubrzanje  $\vec{a}_p$  jednako je ubrzanju središta mase zrakoplova. U mogućnosti smo mjeriti sile veze  $\vec{F}_{veze}$  pa je tada ubrzanje zrakoplova

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_{veze}}{m} + \vec{g}$$

Pretpostavimo da zrakoplov leti horizontalno konstantnom brzinom, onda je  $T + D = 0$ , i  $\vec{L} + \vec{W} = 0$ . Nema ubrzanja. Naglim otklonom kormila visine narušili smo ovu drugu jednadžbu te je  $\vec{L} + \vec{W} \neq 0$ , postojat će normalno ubrzanje središta mase okomito na brzinu leta.

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{L} + \vec{W}}{W/g} = g \frac{\vec{L}}{W} + \frac{\vec{W}}{W/g} = g\vec{n} + \vec{g}$$

Izjednačavanjem ova dva izraza za ubrzanje središta mase

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_{veze}}{m} + \vec{g} = g\vec{n} + \vec{g}$$

dobivamo da je u tom slučaju potrebna sila u vezama koja će *držati* masu  $m$  u mirovanju:

$$\vec{F}_{veze} = mg \cdot \vec{n} \quad 7.19$$

Vidimo da na masu  $m$ , osim njene težine  $mg$ , djeluje i dodana sila  $mg \cdot \vec{n}$  u pravcu i smjeru sile uzgona. Koliko bi normalno opterećenje  $n$  (u smjeru i pravcu uzgona) bilo veće, toliko je veća dopunska sila koja djeluje na malu masu  $m$ . To je značenje riječi *opterećenje*.

Konačno, dok zrakoplov leti u horizontalnom letu, onda je  $\vec{L} + \vec{W} = 0$

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{L} + \vec{W}}{W/g} = 0,$$

što znači da na masu  $m$  djeluje sila veze je  $\vec{F}_{veze} = -m\vec{g}$ . Taj isti zaključak slijedi iz gornje jednadžbe  $\vec{F}_{veze} = mg \cdot \vec{n}$ , jer u tom slučaju vektor  $\vec{n}$  ima intenzitet 1, a smjer u pravcu uzgona (suprotan ubrzanju  $\vec{g}$ ).

Čovjekov organizam može podnijeti neku najveću vrijednost ove sile, i zato faktor opterećenja mora biti manji od neke vrijednosti  $n_{human}$ . Isto tako konstrukcijske veze omogućuju faktor opterećenja do neke vrijednosti  $n_s$ . Kad bi faktor opterećenja premašio tu vrijednost, onda bi došlo do kidanja veza u strukturi. Zato je nužno da faktor opterećenja u letu bude manji od tih ograničenja.

### 7.1.5 Primjer

Odrediti opterećenje malog zrakoplova za najveći otklon kormila visine, ako je za taj otklon koeficijent sile uzgona 75% od maksimalne vrijednosti  $C_{L_{\max}} = 1.45$ , pri zemlji i brzini leta  $V = 50 [m/s]$

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L}{mg}$$

Za maksimalni otklon kormila visine je  $C_L = 0.75 \cdot 1.45 = 1.09$  pri zemlji i brzinom leta  $V = 50 [m/s]$

$$n_{\max} = \frac{\frac{1.225 \cdot 50^2}{2} \cdot 15.1 \cdot 1.09}{1088 \cdot 9.81} = 2.36$$

## 7.2 Stabilnost ravnotežnog leta

Ravnotežni let bit će stabilan ako se opet uspostavi ravnotežni let kakav je bio, kad neki vanjski poremećaj leta naruši tu ravnotežu (npr. udar uzdužnog vjetrova, ulazak u oblak gdje je povećana gustoća i dr.). Postoje dvije stabilnosti ravnotežnog leta: uzdužna stabilnost i bočna stabilnost.

Zrakoplov je uzdužno *stabilan* ako poremećaj napadnog kuta  $\Delta\alpha$  (zbog vanjskih uzroka) stvara promjena momenta propinjanja koja nastoji poništiti taj poremećaj napadnog kuta.

U bočnom gibanju zrakoplova promatramo stabilnost skretanja i valjanja. Tako kažemo da je zrakoplov bočno *stabilan*, ako se zbog poremećaja kuta klizanja  $\Delta\beta$  i (ili) poremećaja kuta valjanja  $\Delta\phi$  pojave promjene momenata skretanja  $\Delta N$  i valjanja  $\Delta L$  koje smanjuju te poremećaje kuta klizanja i kuta valjanja.

### 7.2.1 Uvjeti uzdužne stabilnosti ravnotežnog leta

Vidjeli smo da točka  $A$  na slici 7-1 predstavlja stanje letjelice, tj. njen napadni kut za zadani kut otklona kormila visine. Prvo treba u ravnotežnom letu potreban je pozitivan napadni kut  $\alpha_{rav}$ , a zatim taj ravnotežni kut treba biti stabilan.

Zrakoplov treba za svaku vrijednost otklona kormila visine  $\delta_m$  imati određeni napadni kut  $\alpha_{rav}$  za koji je moment propinjanja jednak nuli:



$$0 = M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha \alpha_{rav}$$

To znači da postoji ravnoteža između dva momenta  $M_0 + M_\delta \delta_m$  i  $M_\alpha \alpha_{rav}$ . Kad letjelica leti s tim kutom  $\alpha_{rav}$ , onda je ukupni moment propinjanja jednak nuli, tj. nema momenta propinjanja, letjelica se ne okreće oko osi  $y$ , napadni kut  $\alpha_{rav}$  se ne mijenja. Kaže se da je letjelica u ravnotežnom letu (*istrimana letjelica*).

Postavlja se pitanje je li letjelica u letu s napadnim kutom  $\alpha_{rav}$  stabilna. Drugim riječima ako iz bilo kojih razloga nastane poremećaj napadnog kuta  $\Delta\alpha$ , pa napadni kut ima novu vrijednost  $\alpha = \alpha_{rav} + \Delta\alpha$ , što će se zbiti? Zbog tog poremećaja  $\Delta\alpha$  narušena je ravnoteža između dva momenta  $M_0 + M_\delta \delta_m$  i  $M_\alpha \alpha$ . Rezultirajući moment propinjanja nije jednak nuli. Za poremećeni napadni kut  $\alpha_{rav} + \Delta\alpha$  bit će taj rezultirajući moment propinjanja

$$M = M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha (\alpha_{rav} + \Delta\alpha).$$

Međutim, kako je  $M_0 + M_\delta \delta_m + M_\alpha \alpha_{rav} = 0$ , bit će novi moment propinjanja

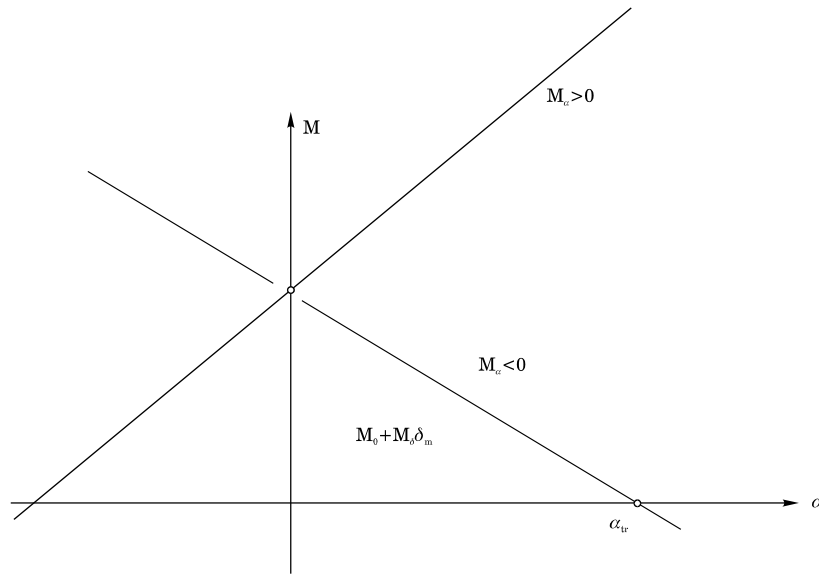
$$M = M_\alpha \Delta\alpha$$

Sve ovisi o predznaku derivativa  $M_\alpha$ . Ako je  $M_\alpha < 0$ , onda novi moment propinjanja  $M$  ima suprotan predznak od  $\Delta\alpha$ . Tako će novi moment propinjanja  $M = M_\alpha \Delta\alpha$ , koji je nastao zbog poremećaja napadnog kuta, biti negativan u slučaju povećanja napadnog kuta, a to znači da će smanjivati napadni kut, tj. težiti da se letjelica vrati u prvobitni položaj  $\alpha_{rav}$ . Ili, ako je poremećaj napadnog kuta bio negativan, moment propinjanja  $M = M_\alpha \Delta\alpha$  bit će pozitivan pa će povećavati napadni kut, tj. opet će težiti da vrati letjelicu u prvobitni položaj  $\alpha_{rav}$ . To znači da letjelica sa  $M_\alpha < 0$  ima stabilan let s napadnim kutom  $\alpha_{rav}$ . U tom slučaju kada je  $M_\alpha < 0$ , da bi ravnotežni napadni kut

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha} \quad 7.20$$

bio pozitivan, mora biti  $M_0 + M_\delta \delta_m$  pozitivno. Tako dobivamo dva uvjeta za stabilan ravnotežni napadni kut:

$$\begin{aligned} M_\alpha &< 0 \\ M_0 + M_\delta \delta_m &> 0. \end{aligned} \quad 7.21$$



Slika 7-2. Statička stabilnost i nestabilnost

Ovakvu stabilnost u ravnotežnom letu zovemo *statička stabilnost leta*, tj. to su dva uvjeta statičke stabilnosti leta. Međutim to nisu jedini mogući uvjeti stabilnosti u ravnotežnom letu.

Do sada smo smatrali da je otklon upravljačke površine  $\delta_m$  proporcionalan otklonu samo otklonu pilotske palice, tj. da je izravno pod kontrolom pilota. Ako letjelica nema statičku stabilnost, ona može biti stabilizirana pomoću povratne veze. Povratna veza je dodani otklon  $\Delta\delta_m$  koji se zbraja s otklonom  $\delta_m$ , tako da je otklon upravljačke površine  $\delta_m + \Delta\delta_m$ , zbroj otklona  $\delta_m$  izravno od pilota, i dodanog otklona  $\Delta\delta_m$  iz povratne veze. U tom je slučaju moment propinjanja

$$M = M_0 + M_\delta(\delta_m + \Delta\delta_m) + M_\alpha(\alpha_{rav} + \Delta\alpha) = M_\delta\Delta\delta_m + M_\alpha\Delta\alpha,$$

jer i dalje vrijedi jednadžba ravnotežne letjelice  $0 = M_0 + M_\delta\delta_m + M_\alpha\alpha_{rav}$ . Taj dodani otklon iz povratne veze  $\Delta\delta_m$  može osigurati da ovaj rezultirajući moment  $M$  bude suprotnog predznaka od poremećaja  $\Delta\alpha$ , a to znači da statički nestabilna letjelica s povratnom vezom može biti stabilna. Takvu stabilnost nazivamo *sintetična stabilnost*.

### 7.2.2 Uzdužna statička stabilnost

Da bismo povećali napadni kut zrakoplova, trebamo negativan otklon kormila visine. Kada smo promijenili otklon kormila visine  $\delta_{m1} < \delta_m$ , normalna sila predstavljena je točkom  $B$  na gornjemu dijagramu slike 7-1, a pojavio se moment propinjanja  $M_B = f_m(\alpha_A, \delta_{m1})$  određen

ordinatom točke  $B$  u donjem dijagramu iste slike. Taj moment okreće letjelicu i povećava napadni kut od vrijednosti  $\alpha_A$  do vrijednosti  $\alpha_D$ . Kako je letjelica stabilna ( $M_\alpha < 0$ ), povećanje napadnog kuta  $\Delta\alpha = \alpha_D - \alpha_A$  stvara dodatni negativni aerodinamički moment  $\Delta M = M_\alpha \Delta\alpha < 0$  propinjanja, tako da letjelica postiže novi ravnotežni položaj predstavljen točkom  $D$  u kojoj je  $M_D = f_m(\alpha_D, \delta_{m1}) = 0$ . U točki  $D$  moment propinjanja je opet nula i letjelica je opet u ravnotežnom stanju, ali sada je normalna sila veća, kao što se vidi u točki  $D$  u gornjem dijelu slike. Prelazak iz točke  $A$  u točku  $D$  predstavlja *prijelazni proces*. On je opisan u zadnjem poglavlju ove knjige.

Statički stabilna letjelice na svaki zauzeti otklon upravljačkih površina poslije prijelaznog procesa zauzima novi ravnotežni položaj u kome je moment za središte mase jednak nuli. Kada promatramo let transportnih zrakoplova, tada nema velike i nagle promjene otklona kormila visine, kao što je slučaj s borbenim lovcima ili akrobatskim zrakoplovima. Za transportne zrakoplove u prvoj iteraciji možemo usvojiti da su oni za vrijeme leta stalno u ravnotežnom stanju, a to znači da je  $M = 0$ , odnosno da je napadni kut uvijek ovisan samo o otklonu kormila visine.

### 7.2.3 Neutralna točka

Gradijent rezultirajućeg momenta po napadnom kutu zbroj je dvaju gradijenata

$$M_\alpha = M_\alpha^F + qSc_A C_{m\alpha} \quad 7.22$$

Ovaj prvi uslijed pogonske sile određuje se prema jednadžbi :

$$M_\alpha^F = F_p (h_m - h_p) \left( 1 - \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha} \right) \quad 7.23$$

U većini slučajeva ovaj je pozitivan te aerodinamički gradijent treba biti ne samo negativan nego i manji od neke negativne vrijednosti. To znači da negativan gradijent aerodinamičkog koeficijenta momenta propinjanja  $C_{m\alpha}^A < 0$  nije dovoljan da bi osigurao prvi uvjet stabilnosti  $M_\alpha < 0$ .

Gradijent momenta propinjanja  $M_\alpha$  koji treba biti negativan ovisi o položaju središta mase. Vidjeli smo da je taj gradijent zbroj gradijenata pogonskog momenta i gradijenta aerodinamičkog momenta propinjanja. Ovaj drugi je ima tri komponente:

od normalne sile krila  $K_{WB} N_{W\alpha} \cdot (h_m - h_{cw})$ ,

od normalne sile horizontalnog repa  $-N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m)(1 - \varepsilon_\alpha)$  i

od tijela  $M_{B\alpha}$ .

Njima treba pridodati još gradijent pogonskog momenta

$$M_{\alpha}^F = F_p (h_m - h_p) (1 - \varepsilon_{u\alpha})$$

Tako dobivamo ukupni gradijent moment propinjanja

$$M_{\alpha} = F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) \cdot (h_m - h_p) + K_{WB} N_{W\alpha} \cdot (h_m - h_{cw}) - N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m) + N_{H\alpha} (h_{ch} - h_m) \cdot \varepsilon_{\alpha} + M_{B\alpha}$$

ili

$$M_{\alpha} = [F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) + K_{WB} N_{W\alpha} + N_{H\alpha} - N_{H\alpha} \varepsilon_{\alpha}] \cdot h_m - \\ - F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) h_p - K_{WB} N_{W\alpha} h_{cw} - N_{H\alpha} h_{ch} + N_{H\alpha} h_{ch} \varepsilon_{\alpha} + M_{B\alpha}$$

Kako je gradijent ukupne normalne sile

$$N_{\alpha} = F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) + K_{WB} N_{W\alpha} + N_{H\alpha} - N_{H\alpha} \cdot \varepsilon_{\alpha}$$

možemo gornju jednadžbu napisati u obliku

$$M_{\alpha} = N_{\alpha} \cdot h_m - F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) h_p - K_{WB} N_{W\alpha} h_{cw} - N_{H\alpha} h_{ch} + N_{H\alpha} h_{ch} \varepsilon_{\alpha} + M_{B\alpha}$$

ili

$$M_{\alpha} = N_{\alpha} \cdot \left( h_m - \frac{F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) h_p + K_{WB} N_{W\alpha} h_{cw} + N_{H\alpha} h_{ch} - N_{H\alpha} h_{ch} \varepsilon_{\alpha} - M_{B\alpha}}{N_{\alpha}} \right)$$

Iz ove jednadžbe se vidi da udaljenost središta mase mora biti manja od vrijednosti

$$h_n = \frac{F_p (1 - \varepsilon_{u\alpha}) h_p + K_{WB} N_{W\alpha} h_{cw} + N_{H\alpha} h_{ch} - N_{H\alpha} h_{ch} \varepsilon_{\alpha} - M_{B\alpha}}{N_{\alpha}}$$

Točka koja se nalazi na ovoj udaljenosti od referentne točke  $A$  naziva se *neutralna tačka*.

Pomoću udaljenosti neutralne točke  $h_n$  možemo napisati da je gradijent momenta propinjanja

$$M_{\alpha} = N_{\alpha} (h_m - h_n)$$

Sad se jasno vidi da će prvi uvjet statičke stabilnosti  $M_{\alpha} < 0$  biti ispunjen ako je

$$\bar{h}_m < \bar{h}_n \quad 7.24$$

tj. ako je središte mase ispred neutralne točke. Što je više središte mase ispred neutralne točke, to će bolje biti zadovoljen uvjet statičke stabilnosti.

#### 7.2.4 Primjer

Odredit ćemo neutralnu točku malog putničkog zrakoplova (odjeljak 5).

Udaljenost neutralne točke od vrha letjelice s elisnim pogonom dobivamo iz uvjeta da je za neutralnu točku zbroj gradijenata pogonskog momenta i aerodinamičkog momenta propinjanja jedna k nuli.

$$M_{\alpha}^F + M_{\alpha} = 0$$

ili

$$\frac{M_{\alpha}^F}{qS_{ref}c_A} + C_{m\alpha} = 0$$

U primjeru iz odjeljka 6.5.3 izračunali smo koeficijent propinjanja pogonskog momenta za mali putnički zrakoplov

$$\frac{M^F}{q_{\infty}S_{ref}c_A} = \frac{F_{p\sigma}}{q_{\infty}S_{ref}}(\alpha - \alpha_T)(\bar{h}_m - \bar{h}_p)$$

Njegov gradijent bit će ( $h_p = -1.471 \rightarrow \bar{h}_p = \frac{-1.471}{1.73} = -0.850$ )

$$\frac{M_{\alpha}^F}{q_{\infty}S_{ref}c_A} = \frac{F_{p\sigma}}{q_{\infty}S_{ref}}(\bar{h}_m - \bar{h}_p) = 0.0132 \cdot (\bar{h}_m + 0.850)$$

Aerodinamički moment propinjanja izračunan je u odjeljku 5.3.6

$$C_m^A = -(1.482 - 4.72\bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.607 - 0.216\bar{h}_m) \cdot K_f \delta_m - \\ - (0.254 - 3.640\bar{h}_m) \cdot i_w - (1.212 - 0.446\bar{h}_m) \cdot i_h - 0.055 + 0.192\bar{h}_m$$

Bez obzira na to koliki su postavni kutovi  $i_w$  i  $i_h$ , bit će gradijent aerodinamičkog momenta propinjanja

$$C_{m\alpha}^A = -(1.482 - 4.72\bar{h}_m)$$

Ukupni gradijent momenta propinjanja

$$\frac{M_{\alpha}^F}{q_{\infty}S_{ref}c_A} + C_{m\alpha}^A = 0.0132 \cdot (\bar{h}_m + 0.850) - (1.482 - 4.72\bar{h}_m)$$

Kada je središte mase u neutralnoj točki gradijent momenta propinjanja mora biti jednak nuli:

$$0.0132(\bar{h}_n + 0.850) - (1.482 - 4.72\bar{h}_n) = 0$$

Iz ove jednadžbe dobivamo

$$(4.72 + 0.0132)\bar{h}_n = 1.482 - 0.011$$

$$\bar{h}_n = 0.31$$

To znači da je neutralna točka udaljena od točke A

$$h_n = \bar{h}_n c_A = 0.31 \cdot 1.730 = 0.536 \text{ m}$$

Ako se središte mase na udaljenosti od vrha letjelice  $\ell_m = 1.719 \text{ m}$ , odnosno od točke A

$h_m = 0.248 \text{ m}$  onda je

$$\bar{h}_n - \bar{h}_m = \frac{0.536 - 0.248}{1.730} = 0.17$$

Uočimo iz ovog primjera da postavni kutovi krila i horizontalnog repa nemaju utjecaja na položaj neutralne točke.

### 7.2.5 Bočna statička stabilnost

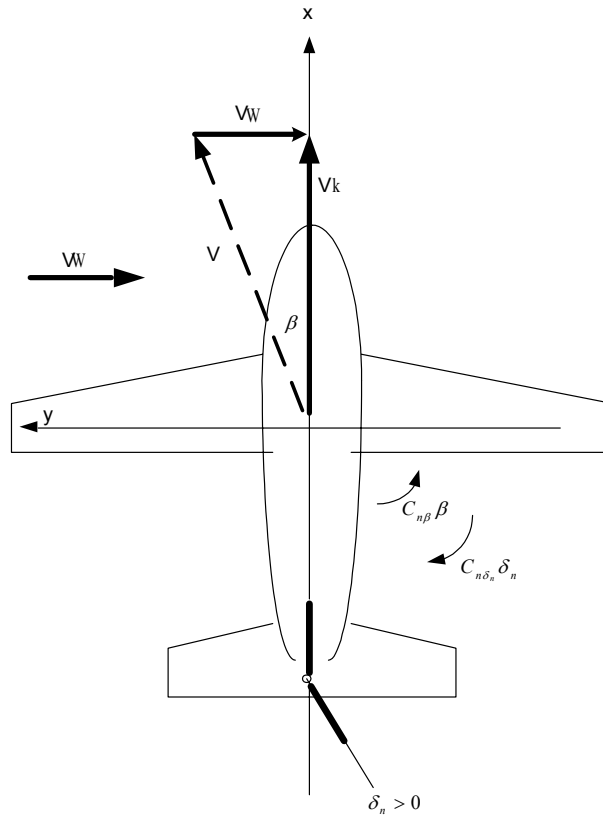
U ravnini simetrije zrakoplova pozitivni moment propinjanja  $M$  povećava pozitivni napadni kut, ali u poprečnoj ravnini, pozitivni moment skretanja smanjuje pozitivni kut skretanja. Pretpostavimo da zrakoplov leti pravocrtno bez kuta klizanja i bez valjanja, tj.  $\beta = 0$  i  $\phi = 0$ . Otklon kormila pravca neka je nula  $\delta_n = 0$ . U takvom pravocrtnom letu kutne brzine su nula,  $p = q = r = 0$ . U tom letu aerodinamički moment valjanja i skretanja kao i od pogonske sile jednaki su nuli. Neka je u jednom trenutku zapuhnuo bočni vjetar, takav da se pojavio kut klizanja  $\beta > 0$  kao na slici 7-3. Kao posljedica toga kuta je pojavljuje se aerodinamički moment valjanja i momenta skretanja:

$$\begin{aligned} L^A &= \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{l\beta} \beta \\ N^A &= \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{n\beta} \beta \end{aligned} \quad 7.25$$

kao i pogonski momenti prema jednadžbama 6.81 i 6.91:

$$\begin{aligned} L^F &= F_p \beta z_p \\ N^F &= -F_p \beta (h_m - h_p) \end{aligned}$$

u kojima je za elisni motor  $F_p = F_{p\sigma}$ ,  $h_p = h_{elisa}$ , a za mlazni motor  $F_p = F_{pu}$ ,  $h_p = h_u$ .



Slika 7-3. Zrakoplov i bočni vjetar

Uvjet je bočne statičke stabilnosti da zbroj momenata skretanja

$$N^A + N^F = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{n\beta} \beta - F_p (h_m - h_p) \cdot \beta$$

bude pozitivan kako bi svojim djelovanjem smanjivao nastali kut klizanja  $\beta$ . Prema konvenciji predznaka, da bi moment skretanja  $N^A + N^F$  smanjivao nastali kut klizanja  $\beta > 0$ , on treba biti pozitivan, a to znači da mora biti

$$\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{n\beta} - F_p (h_m - h_p) > 0$$

ili

$$C_{n\beta} > \frac{F_p (h_m - h_p)}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b} \quad 7.26$$

Kako je prema jednadžbi 4.8

$$C_{n\beta} = (C_{n\beta})_{VB} + (C_{n\beta})_{WB} + (C_{n\beta})_f,$$

Prema jednadžbama 4.11 i 4.13

$$(C_{n\beta})_{VB} = \eta_V \frac{S_V}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_V K_{VB} \frac{\partial \beta_V}{\partial \beta} \frac{h_{CV} - h_m}{b}.$$

$$(C_{n\beta})_f = -1.3 \frac{V_f D_f}{W_f S_{ref} b},$$

dok je  $(C_{n\beta})_{WB}$  proporcionalno kvadratu koeficijenta uzgona.

$$\eta_V \frac{\partial \beta_V}{\partial \beta} \cdot \frac{S_V}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_V K_{VB} \cdot \frac{h_{CV} - h_m}{b} + (C_{n\beta})_{WB} > \frac{F_p (h_m - h_p)}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} + 1.3 \frac{V_f D_f}{W_f S_{ref} b}$$

Ovaj uvjet nije teško ispuniti odgovarajućim dimenzioniranjem produkta  $S_V (h_{CV} - h_m)$  vertikalnog repa, koji nazivamo *volumen vertikalnog stabilizatora*. Taj produkt lako udovoljava i strožijem uvjetu

$$\eta_V \frac{\partial \beta_V}{\partial \beta} \cdot \frac{S_V}{S_{ref}} (C_{N\alpha})_V K_{VB} \cdot \frac{h_{CV} - h_m}{b} > \frac{F_p (h_m - h_p)}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} + 1.3 \frac{V_f D_f}{W_f S_{ref} b}$$

Za dimenzioniranje vertikalnog repa postoje još teži zahtjevi koje ćemo razmotriti u poglavlju o upravljivosti bočnog gibanja.

## 7.3 Upravljivost u ravnotežnom letu

### 7.3.1 Upravljivost u uzdužnom gibanju

Sila uzgona mijenja pravac brzine te ona predstavlja upravljačku silu:

$$L = (F_{N0} + qSC_{N0}) + (F_{N\alpha} + qSC_{N\alpha} - qSC_A)\alpha + qSC_{L\delta}\delta_m \quad 7.27$$

Ima tri komponente:

- prva je konstantna

$$L_0 = F_{Y0}^p + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{N0} \quad 7.28$$

- druga je proporcionalna napadnom kutu i ona je najvažnija

$$L_\alpha \alpha = \left( F_{Y\alpha}^p + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} (C_{N\alpha} - C_A) \right) \alpha \quad 7.29$$

- treća je proporcionalna odklonu upravljačkih površina

$$L_{\delta_m} \delta_m = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_{N\delta} \delta_m. \quad 7.30$$



U ravnotežnom letu, kada je  $M = 0$ , kod aerodinamičke sheme canard treća je komponenta u istom smjeru kao i druga, a kod normalne sheme u suprotnom je smjeru. Zato je rezultirajuća normalna shema kod canard konfiguracije veća u odnosu na normalnu shemu. To je jedan od razloga što zrakoplovi koji trebaju imati velike manevarske mogućnosti imaju canard konfiguracije.

Sila uzgona u ravnotežnom stanju ovisi samo o otklonu kormila visine jer ravnotežni napadni kut ovisi o otklonu kormila visine.

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha} \quad 7.31$$

Uvrstimo li ovu vrijednost za ravnotežni napadni kut u jednadžbu za silu uzgona, dobivamo:

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m = L_0 + L_\alpha \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha} + L_\delta \delta_m$$

$$L_{rav} = L_0 + L_\alpha \frac{M_0}{-M_\alpha} + \left( L_\alpha \frac{M_\delta}{-M_\alpha} + L_\delta \right) \delta_m \quad 7.32$$

Apsolutna vrijednost derivacije sile uzgona po otklonu kormila visine

$$\frac{dL_{rav}}{d\delta_m} = L_\alpha \frac{M_\delta}{-M_\alpha} + L_\delta \quad 7.33$$

mjera je upravljivosti, jer pokazuje za koliko se promijeni upravljačka sila kad se promijeni otklon kormila visine, bez obzira na koju stranu. Da bismo vidjeli utjecaj položaja središta mase na upravljivost, podsjetimo se jednadžbe za gradijent momenta propinjanja ovisno o položaju neutralne točke i središta mase:

$$\frac{M_\alpha}{qS_{ref}c_A} = -\frac{N_\alpha}{qS_{ref}}(\bar{h}_n - \bar{h}_m) \quad 7.34$$

Iz te jednadžba dobivamo vezu ( $N_\alpha = L_\alpha$ )

$$\frac{M_\alpha}{N_\alpha} = -c_A(\bar{h}_n - \bar{h}_m) \quad 7.35$$

Zamjenom u gornju jednadžbu 7.40, dobivamo ovisnost upravljivosti o položaju središta mase i normalne točke:

$$\frac{dL_{rav}}{d\delta_m} = \frac{M_{\delta_m}}{c_A(\bar{h}_n - \bar{h}_m)} + L_{\delta_m} \quad 7.36$$

gdje su, podsjetimo se,  $L_{\delta_m}$  i  $M_{\delta_m}$  određeni jednadžbama 3.89 i 3.90 u odjeljku 3.2.4. U ovoj jednadžbi pojavljuje se totalna i parcijalna derivacija uzgona. Totalna derivacija koeficijenta uzgona (ili koeficijenta normalne sile) po otklonu kormila visine, moguća je s obzirom na

zavisnost napadnog kuta  $\alpha$  od otklona kormila visine  $\delta_m$  prema jednadžbi 7.38 koja postoji u ravnotežnom let. Drugim riječima jednadžba 7.43 kao mjerilo upravljivosti, postoji samo u ravnotežnom letu kada važi jednadžba 7.38.

Jednadžba 7.43 pokazuje utjecaj  $\bar{h}_n - \bar{h}_m$  na upravljivost i jasno ukazuje da upravljivost opada s povećanjem razlike  $(\bar{h}_n - \bar{h}_m)$ . Tako dolazimo do spoznaje da središte mase ne treba ići suviše prema naprijed, kako smo to željeli zbog statičke stabilnosti, jer se time smanjuje upravljivost letjelice. To znači da su uvjet statičke stabilnosti i uvjet upravljivosti oprečni. To je jedan od razloga što se za zrakoplove koji trebaju velike manevarske mogućnosti, pitanje stabilnosti rješava pomoću povratne veze (sintetična stabilnost) i canard konfiguracija.

Za transportne zrakoplove koji ne trebaju velike manevarske mogućnosti primjenjuje se normalna shema. Položaj krila i dimenzije horizontalnog repa određuju se tako da neutralna točka bude na udaljenosti od središta mase 2% do 5% aerodinamičke tetive, tj.

$$0.02 > \bar{h}_n - \bar{h}_m > 0.05 \quad 7.37$$

Maksimalnu silu uzgona postizemo pri maksimalnom napadnom kutu. Taj napadni kut treba se ostvariti s najvećim otklonom kormila visine, no u određenim granicama, jer u suprotnom dolazi do odvajanja struje i pada učinkovitost kormila. Isto tako maksimalni napadni kut ne smije biti veći od neke granične vrijednost  $\alpha_{max}$ , jer u suprotnome naglo pada uzgon zrakoplova (*stall*). Tom maksimalnom otklonu kormila visine  $\delta_{m \max}$  odgovara u ravnotežnom letu najveći dopušteni napadni kut zrakoplova, a on je 25% manji od najvećeg napadnog kuta pri kome nastaje *stall*. Znači da maksimalnom otklonu kormila visine  $\delta_{m \max}$  treba odgovarati ravnotežni kut  $0.75 \cdot \alpha_{max}$ . Iz jednadžbe za ravnotežni napadni kut

$$0.75 \cdot \alpha_{max \text{ rav}} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_{m \max}}{-M_\alpha} \quad 7.38$$

možemo odrediti koliko je potrebno aerodinamičko pojačanje (odnos  $M_\delta/M_\alpha$ ) letjelice.

### 7.3.2 Utjecaj središta mase na ravnotežni napadni kut

U prethodnoj točki vidjeli smo da središte mase može ići u nazad do neutralne točke a da zrakoplov ostane statički stabilan. Promatramo sad drugi ekstremni slučaj. Pomjerimo središte mase u naprijed. Drugim riječima promatramo kako se mijenja ravnotežni napadni kut kad otklon  $\delta_m$  ostaje isti, a smanjuje se udaljenost središta mase  $h_m$ .

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0 + M_\delta \delta_m}{-M_\alpha}$$

ako se smanjuje  $h_m$ . Kako su

$$M_\alpha = -N_\alpha \cdot (h_n - h_m)$$

$$M_\delta = N_{H\delta} (h_m - h_{\delta h})$$

$$\begin{aligned} M_0 &= M_0^F + M_0^A \\ &= z_p T \cos \alpha_T - (T \sin \alpha_T + F_p \alpha_T) (h_m - h_p) + K_{WB} L_{W0} (h_m - h_{cw}) + N_{H\alpha} i_h (h_m - h_{ch}) \\ &= (K_{WB} L_{W0} + L_{H\alpha} i_h - T \sin \alpha_T) \cdot h_m + \\ &\quad + z_p T \cos \alpha_T + (T \sin \alpha_T + F_p \alpha_T) h_p - K_{WB} L_{W0} \cdot h_{cw} - L_{H\alpha} i_h h_{ch} \end{aligned}$$

Bit će

$$\begin{aligned} M_0 + M_\delta \delta_m &= (K_{WB} L_{W0} + L_{H\alpha} i_h + L_{H\delta} \delta_m - T \sin \alpha_T) \cdot h_m + \\ &\quad + z_p T \cos \alpha_T + (T \sin \alpha_T + F_p \alpha_T) h_p - K_{WB} L_{W0} \cdot h_{cw} - L_{H\alpha} i_h h_{ch} - L_{H\delta} \delta_m h_{\delta h} \end{aligned}$$

Iz ove jednadžbe vidimo da se smanjenjem  $h_m$  brojilac  $M_0 + M_\delta \delta_m$  smanjuje, a nazivnik  $-M_\alpha$  povećava. To znači da za konstantno  $\delta_m$  smanjenjem  $h_m$  smanjuje se  $\alpha_{rav}$ .

### 7.3.3 Primjer

Odrediti postavni kut horizontalnog repa malog putničkog zrakoplova tako da je za maksimalni otklon kormila visine  $\delta_m = 18^\circ$  sila uzgona 75% od maksimalne kritične vrijednosti  $C_L = 1.45$ , ako je postavni kut krila  $i_w = +1^\circ$ , a udaljenost središta mase od aerodinamičkog ishodišta  $\bar{h}_m = 0.137$ .

Jednadžbe koje daju koeficijente aerodinamičke sile uzgona i momenta propinjanja izračunane su u odjeljku 5.3.5 i 5.3.6:

$$C_L^A = 4.72 \alpha + 0.216 K_f \delta_m + 3.64 i_w + 0.446 i_h + 0.192$$

$$\begin{aligned} C_m^A &= -(1.482 - 4.72 \bar{h}_m) \cdot \alpha - (0.607 - 0.216 \bar{h}_m) \cdot K_f \delta_m - \\ &\quad - (0.254 - 3.640 \bar{h}_m) \cdot i_w - (1.212 - 0.446 \bar{h}_m) \cdot i_h - 0.055 + 0.192 \bar{h}_m \end{aligned}$$

Za  $\bar{h}_m = 0.137$  i postavni kut krila  $i_w = 1^\circ$  ove jednadžbe daju vrijednosti:

$$C_L^A = 4.72 \alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.446 \cdot i_h + 0.256$$

$$C_m^A = -0.835 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 1.151 \cdot i_h - 0.024$$

Tim koeficijentima trebamo dodati i odgovarajuće koeficijente od pogonske sile i pogonskog momenta koje smo odredili u šestom poglavlju i konkretno izračunali u primjeru 6.5.3

$$C_Z^F = \frac{F_Z}{q_\infty S_{ref}} = 0.0010 - 0.0132 \cdot \alpha$$

$$C_m^F = \frac{M^F}{q_\infty S_{ref} c_A} = 0.0134 \cdot \alpha + 0.0068$$

Tako dobivene koeficijente zbrajamo s aerodinamičkim. Pri tome vodimo računa da je  $C_Z^F = -C_N^F$ :

$$C_L = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.446 \cdot i_h + 0.255$$

$$C_m = -0.822 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 1.151 \cdot i_h - 0.017$$

Iz uvjeta da pri otklonu kormila visine  $\delta_m = -18^\circ = -0.314$  (za taj otklon je  $K_f = 0.87$ ) imamo 75% od maksimalne sile uzgona, dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$0.75 \cdot 1.45 = 4.73 \alpha_{rav} + 0.216 \cdot 0.87 \cdot (-0.314) + 0.446 i_h + 0.255$$

$$-0.822 \alpha_{rav} - 0.577 \cdot 0.87 \cdot (-0.314) - 1.151 \cdot i_h = 0.017$$

Kad se urede te jednadžbe imaju oblik

$$4.73 \cdot \alpha_{rav} + 0.446 \cdot i_h = 0.892$$

$$0.822 \alpha_{rav} + 1.151 \cdot i_h = 0.141$$

Iz tih dviju jednadžbi trebamo odrediti  $i_h$  i  $\alpha_{rav}$ . Njihovo rješenje je

$$\alpha_{\max} = 0.190 = 10.9^\circ$$

$$i_h = -0.013 = -0.7^\circ$$

S dobivenim postavnim kutom horizontalnog repa, jednadžbe ukupnog koeficijenta sile uzgona i ukupnog momenta propinjanja imaju oblik:

$$C_L = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.249$$

$$C_m = -0.822 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 0.002$$

U horizontalnom letu uzgon je jednak težini te ako je pri najvećoj masi malog zrakoplova  $m = 1088 \text{ kg}$  brzinu leta  $V = 54.4 \text{ m/s}$ , treba biti:

$$C_L = \frac{mg}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} = \frac{1088 \cdot 9.81}{\frac{1.007 \cdot 54.4^2}{2} \cdot 15.1} = 0.474$$

To znači da će u horizontalnom letu trebati otkloniti kormilo visine za veličinu koju određujemo iz jednadžbi

$$0.474 = 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m + 0.249$$

$$0 = -0.822 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m - 0.002$$

ili

$$4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m = 0.225$$

$$0.822 \cdot \alpha + 0.577 \cdot K_f \delta_m = -0.002$$

Rješenje ovih jednadžbi je

$$\alpha_{rav} = 0.0510 = 2.9^0$$

$$K_f \delta_m = -0.0762 = -4.4^0$$

Za otklone upravljačkih površina manje od  $10^0$  prema slici 2-16 je  $K_f = 1$ .

### 7.3.4 Upravljivost bočnog leta

Bočno stabilna letjelica okrenut će se “uz vjetar”, poništiti će kut klizanja  $\beta$ , ali će zato promijeniti pravac leta. Da bi nastavila letjeti u željenom pravcu, letjelica mora letjeti s kutom klizanja  $\beta$ , a da pri tome moment skretanja i moment valjanja budu i dalje jednaki nuli kao prije pojave bočnog vjetra. Ta ravnoteža momenata skretanja i valjanja postiže se otklonom kormila pravca  $\delta_n$  i krilaca  $\delta_\ell$ . Drugim riječima, u uvjetima bočnog vjetra koji stvara kut klizanja  $\beta$ , trebaju otkloni kormila pravca  $\delta_n$  i krilaca  $\delta_\ell$  biti takvi da ukupni moment valjanja i ukupni moment skretanja budu jednaki nuli:

$$L = L^F + L^A = z_p F_p \beta + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b (C_{\ell\beta} \beta + C_{\ell\delta_\ell} \delta_\ell + C_{\ell\delta_n} K_f \delta_n) = 0$$

$$N = N^F + N^A = -(h_m - h_u) \cdot F_p \beta + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b (C_{n\beta} \beta + C_{n\delta_\ell} \delta_\ell + C_{n\delta_n} K_f \delta_n) = 0$$

Te jednadžbe kad se urede imaju oblik:

$$C_{\ell\delta_\ell} \delta_\ell + C_{\ell\delta_n} K_f \delta_n = - \left( \frac{F_p}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} \bar{z}_p + C_{\ell\beta} \right) \beta$$

$$C_{n\delta_\ell} \delta_\ell + C_{n\delta_n} K_f \delta_n = - \left[ \frac{-F_p}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} (\bar{h}_m - \bar{h}_p) + C_{n\beta} \right] \beta$$
7.39

Dobivene jednadžbe moraju imati realno rješenje, tj. učinkovitost krilaca i kormila pravca moraju biti dovoljna da se omogući let u uvjetima dopuštenog vjetra. Kako su otkloni ograničeni najvećim vrijednostima, bočna stabilnost zrakoplova je zadovoljena ako je kut klizanja manji od neke vrijednosti  $\beta_{max}$  koja je u općem slučaju ovisna o Machovom broju.

Uvjeti sigurnosti zrakoplova s više motora zahtijevaju i više od toga, jer ako otkáže jedan od dva motora, onda se pojavljuje (prema jednadžbi 6.93 za elisni pogon, a prema jednadžbi 6.83 za slučaj mlaznog motora) moment skretanja

$$N^F = -y_p T \cos \alpha_T - (h_m - h_p) F_p \beta_p \quad 7.40$$

i moment valjanja:

$$L^F = y_p T \sin \alpha_T + z_p F_p \beta_p \quad 7.41$$

u kojima je za elisni motor  $F_p = F_{p\sigma}$ ,  $h_p = h_{elisa}$ , a  $F_p = F_{pu}$ ,  $h_p = h_u$ ;  $\beta_p = \beta_u$  za mlazni motor. U oba slučaja pojavljuje se vrlo snažna komponenta momenta skretanja  $y_p T \cos \alpha_T$  koja nije više uravnotežena simetričnim motorom s druge strane. Osim toga, na drugoj strani umjesto pogonske sile  $T$  stvara se aksijalna sila  $A_p$  strujanja kroz motor suprotnog smjera. Tako se taj moment skretanja oko osi  $z$  još dodatno povećava:

$$-y_p (T + A_p) \cos \alpha_T$$

Treba uzeti u obzir onu kombinaciju otkaza motora ( $y_p$  pozitivno za desni motor ili negativno za lijevi) i bočnog vjetra kada se aerodinamički moment  $\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b C_{n\beta} \beta$  uslijed bočnog vjetra i moment skretanja motora  $-y_p (T + A_p) \cos \alpha_T$  zbrajaju. Za bočni vjetar, kao na slici 7-2 koji stvara pozitivan kut klizanja, nepovoljan je otkaz desnog motora, jer lijevi motor ( $y_p < 0$ ) povećava taj kut klizanja. Jednadžba ravnoteže momenata skretanja ima oblik:

$$-y_p (T + A_p) \cos \alpha_T - (h_m - h_p) F_p \beta_p + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b (C_{n\beta} \beta + C_{n\delta_n} K_f \delta_n + C_{n\delta_\ell} \delta_\ell) = 0.$$

Isto tako i u jednadžbi valjanja pojavljuje se novi član  $y_p (T + A_p) \sin \alpha_T$  pa ona dobiva oblik:

$$y_p (T + A_p) \sin \alpha_T + z_p F_p \beta_p + \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b (C_{\ell\beta} \beta + C_{\ell\delta_\ell} \delta_\ell + C_{\ell\delta_n} K_f \delta_n) = 0.$$

Kad se ove jednadžbe uredi, one imaju oblik:

$$\begin{aligned} C_{\ell\delta_\ell} \delta_\ell + C_{\ell\delta_n} K_f \delta_n &= \frac{(T + A_p) \sin \alpha_T}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} \bar{y}_p - \left[ \frac{F_p}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} \bar{z}_p + C_{\ell\beta} \right] \beta \\ C_{n\delta_\ell} \delta_\ell + C_{n\delta_n} K_f \delta_n &= \frac{(T + A_p) \cos \alpha_T}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} \bar{y}_p + \left[ \frac{F_p}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} (\bar{h}_m - \bar{h}_p) - C_{n\beta} \right] \beta \end{aligned} \quad 7.42$$

Bitno je uočiti da u ovom slučaju rješenja  $\delta_n$  i  $\delta_\ell$  ovise o aerodinamičkoj brzini  $V$ . Kako otkloni ne smiju biti veći od nekih maksimalnih vrijednosti koje osiguravaju pravilno optjecanje kormila pravca i krilaca, koje su fizički ograničene na zrakoplovu, slijedi da aerodinamička brzina  $V$  mora biti veća od neke vrijednosti koja se zove *minimalna brzina upravljanja* (*minimum control speed*) i označava se sa  $V_{cm}$ . To znači da zrakoplov pri zalijetanju na pisti tek kada dostigne tu brzinu može kompenzirati bočni vjetar i eventualni otkaz jednog bočnog motora.

### 7.3.5 Primjer

Mali zrakoplov pri aerodinamičkoj brzini  $V = 10 \text{ m/s}$  u uvjetima bočnog vjetra  $v_w = 8 \text{ m/s}$  ima kut klizanja  $\beta = 10^\circ$ . Koje otklone kormila pravca i krilaca treba imati da bi savladao bočni vjetar

U odjeljku 6.5.3 izračunano je

$$\frac{F_{p\sigma}}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} = 0.0132,$$

te je uvjet bočne stabilnosti

$$C_{n\beta} = 0.154 > \frac{F_{p\sigma}(h_m - h_p)}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b} = 0.0132 \cdot \frac{1.719}{8.77} = 0.0026$$

više nego zadovoljen. Pri postojanju bočnog vjetra koji stvara kut klizanja  $\beta = 10^\circ = 0.1745$  potrebni otkloni određeni su jednadžbama:

$$C_{\ell\delta_\ell} \delta_\ell + C_{\ell\delta_n} K_f \delta_n = - \left( \frac{F_p}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}} \bar{z}_p + C_{\ell\beta} \right) \beta$$

$$C_{n\delta_\ell} \delta_\ell + C_{n\delta_n} K_f \delta_n = - \left[ \frac{-F_{p\sigma}(\ell_m - \ell_p)}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref} b} + C_{n\beta} \right] \beta$$

Za mali zrakoplov gradijenti koeficijenta momenta skretanja određeni su u potpoglavlju 5.4, a momenta valjanja u 5.5. Os motora prolazi kroz središte mase te je  $\bar{z}_p = 0$ . Za te vrijednosti ove jednadžbe imaju oblik:

$$0.517 \cdot \delta_\ell + 0.0122 \cdot K_f \delta_n = -[-0.105] \cdot 0.1745$$

$$-0.0344 \cdot \delta_\ell - 0.0721 \cdot K_f \delta_n = -\left[0.0125 \cdot \frac{1.719}{8.77} + 0.154\right] 0.1745$$

Poslije sređivanja dobivamo:

$$0.517 \cdot \delta_\ell + 0.0122 \cdot K_f \delta_n = 0.0183$$

$$-0.0344 \cdot \delta_\ell - 0.0721 \cdot K_f \delta_n = -0.0273$$

Rješenje je

$$\delta_\ell = 0.0268 = 1.5^\circ$$

$$K_f \delta_n = 0.366 = 21.0^\circ$$

Korekcija uz odklon kormila pravca za relativnu debljinu 9% prema slici 2-16 jest reda veličine  $K_f = 0.70$ , pa je potreban odklon kormila pravca  $\delta_n = 30^\circ$ . Budući da je taj odklon kormila pravca najveća moguća vrijednost, znači da je kut  $\beta = 10^\circ$  zbog bočnog vjetra najveća vrijednost pri kojoj je još moguće držati zrakoplov na željenom pravcu leta. Ako je polijetanje pri brzini  $30 \text{ m/s}$ , da bi u kut skretanja bio  $\beta < 10^\circ$ , bočni vjetar ne smije biti veći od

$$V_w = V_K \tan \beta = 30 \cdot \tan 10^\circ = 5.3 \text{ m/s}.$$

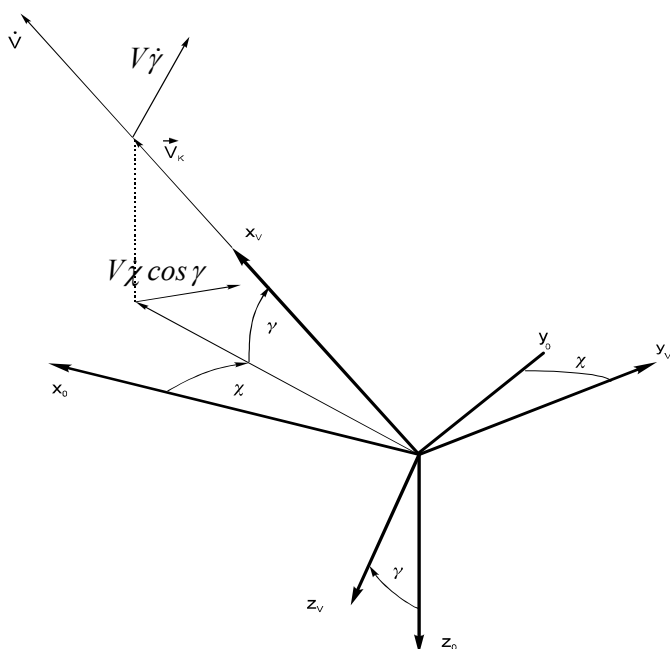
## 7.4 Jednadžbe gibanja ravnotežnog leta

Želimo promatrati gibanje središta mase. Polazimo stoga od vektorske jednadžbe gibanja središta mase

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{W} + \vec{R}^A \quad 7.43$$

Zanemarit ćemo zakrivljenost Zemljine površine i rotaciju Zemlje. Pretpostavit ćemo da nema vjetra, pa su brzina leta i aerodinamička brzina jednake  $V_K = V$ .





Slika 7-4. Ubrzanja duž osi brzinskog koordinatnog sustava

Osim toga, i kutovi aerodinamičke brzine i brzine leta također su isti:  $\chi = \chi_A$  i  $\gamma = \gamma_A$ . Kad pretpostavljamo da nema vjetra, onda je logično da nema ni kuta klizanja, a to znači da ne postoji bočna komponenta  $K$  aerodinamičke sile. Projicirat ćemo jednadžbu gibanja središta mase na osi brzinskog koordinatnog sustava.

#### 7.4.1 Komponente ubrzanja

Komponente brzine u brzinskom koordinatnom sustavu su  $\mathbf{V} = [V \ 0 \ 0]^T$ , a kutna brzina brzinskog koordinatnog sustava je  $\mathbf{\Omega}_V = [-\dot{\chi} \sin \gamma \ \dot{\gamma} \ \dot{\chi} \cos \gamma]^T$  pa su komponente ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}_V \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\chi} \cos \gamma & \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \cos \gamma & 0 & \dot{\chi} \sin \gamma \\ -\dot{\gamma} & -\dot{\chi} \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V \dot{\chi} \cos \gamma \\ -V \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad 7.44$$

#### 7.4.2 Komponente sile

Pogonska sila  $\bar{F}$  ima komponente u koordinatnom sustavu letjelice:

$$\mathbf{F} = [T \cos \alpha_T \ 0 \ T \sin \alpha_T]^T$$

Težina letjelice ima komponente u nošenom koordinatnom sustavu:

$$\mathbf{W}^o = [0 \quad 0 \quad W]^T$$

Aerodinamička sila u aerodinamičkom koordinatnom sustavu ima komponente:

$$\mathbf{R}^A = [-D \quad 0 \quad -L]^T$$

Projekcije vektorske jednadžbe gibanja bit će na osi brzinskog koordinatnog sustava:

$$m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V \cos \gamma \dot{\chi} \\ -V\dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{VF} \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{VO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{VA} \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix} \quad 7.45$$

Podsjetimo još jednom na to da su brzina leta i aerodinamička brzina jednake zato što nema vjetra, te je os  $x$  aerodinamičkog i brzinskog koordinatnog sustava zajednička. Os  $z_A$  nalazi se u ravnini simetrije zrakoplova, a os  $z_V$  u vertikalnoj ravnini. One čine kut  $\mu_A$  u ravnini okomitoj na brzinu, koji mjerimo od brzinske osi  $z_V$  do aerodinamičke osi  $z_A$ . Prema tome, u brzinski iz aerodinamičkog koordinatnog sustava dolazi se rotacijom oko  $x$  za kut  $-\mu_A$ .

$$\mathbf{L}_{VA} = \mathbf{L}_X(-\mu_A) \quad 7.46$$

Matricu transformacije u brzinski iz koordinatnog sustav letjelice dobit ćemo posredno preko aerodinamičkog koordinatnog sustava:

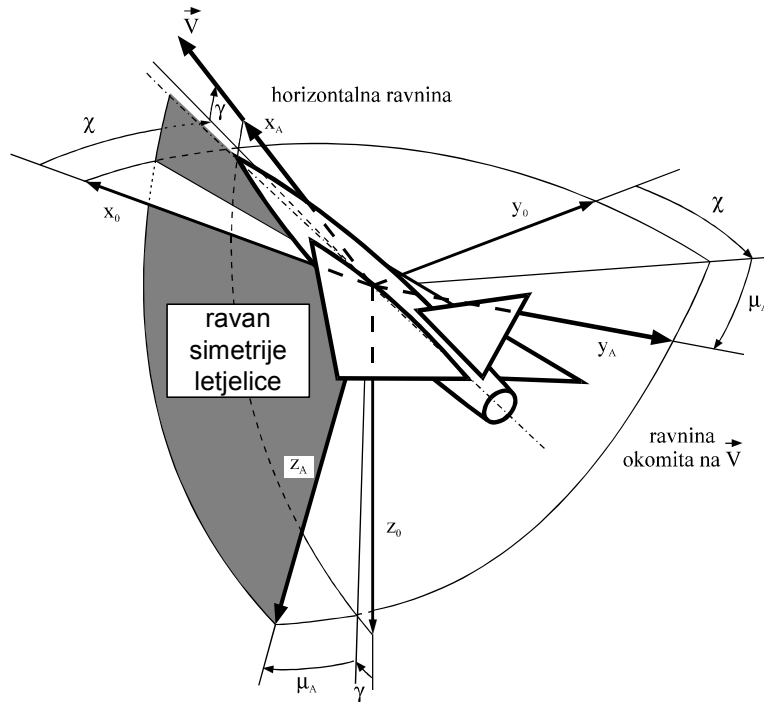
$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA} \mathbf{L}_{AF}$$

U aerodinamički iz koordinatnog sustava letjelice dolazi se poslije dvije rotacije. Prva je oko osi  $y$  za kut  $-\alpha$ , a zatim oko osi  $z$  za kut  $\beta$ . S obzirom da tražimo jednadžbe gibanja u atmosferi bez vjetra, usvajamo da je kut klizanja  $\beta = 0$ , te je

$$\mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_Y(-\alpha).$$

Zato je konačno:

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VA} \mathbf{L}_{AF} = \mathbf{L}_X(-\mu_A) \mathbf{L}_Y(-\alpha) \quad 7.47$$



Slika 7-5. Ravan simetrije zrakoplova i vertikalna ravan kroz brzinu

Matrica transformacije u brzinski iz nošenoga koordinatnog sustava:

$$\mathbf{L}_{VO} = \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi) \quad 7.48$$

Pomoću tih matricama dobit ćemo konačno jednadžbu gibanja središta mase letjelice:

$$m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ V \cos \gamma \dot{\chi} \\ -V \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_X(-\mu_A)\mathbf{L}_Y(-\alpha) \begin{bmatrix} T \cos \alpha_T \\ 0 \\ T \sin \alpha_T \end{bmatrix} + \mathbf{L}_Y(\gamma)\mathbf{L}_Z(\chi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} + \mathbf{L}_X(-\mu_A) \begin{bmatrix} -D \\ K \\ -L \end{bmatrix}$$

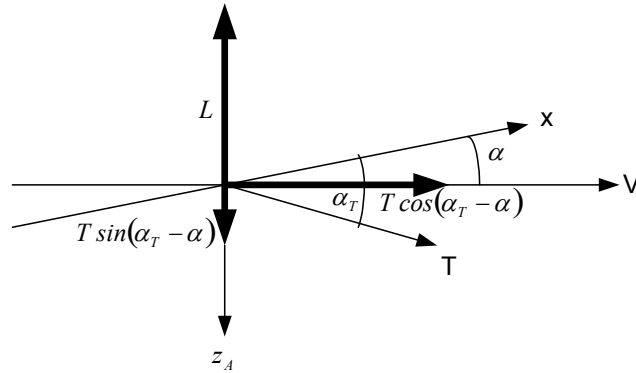
Množenjem matrica dobivamo skalarne jednadžbe:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos \alpha_T \cos \alpha + T \sin \alpha_T \sin \alpha - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= T \cos \alpha_T \sin \alpha \sin \mu_A - T \sin \alpha_T \cos \alpha \sin \mu_A + L \sin \mu_a \\ -mV \dot{\gamma} &= -T \cos \alpha_T \sin \alpha \cos \mu_A + T \sin \alpha_T \cos \alpha \cos \mu_A + W \cos \gamma - L \cos \mu_a \end{aligned}$$

Na osnovu toga dobivamo polazne jednadžbe za izučavanje performansi zrakoplova u atmosferi bez vjetra:

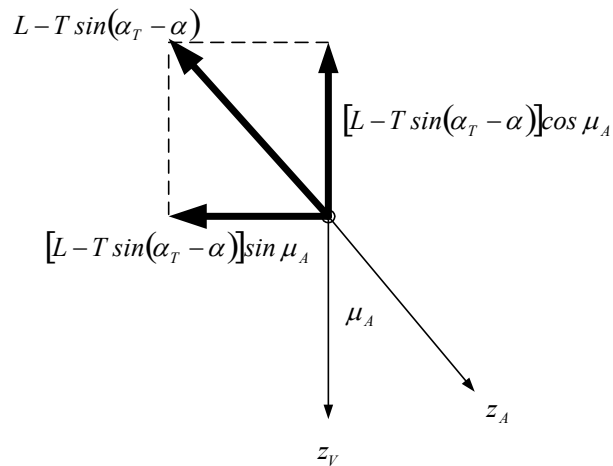
$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_a \\ mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_a - W \cos \gamma \end{aligned} \quad 7.49$$

Te smo jednadžbe mogli i izravno ispisati. Promatramo sliku 7-6 u ravnini simetrije letjelice.



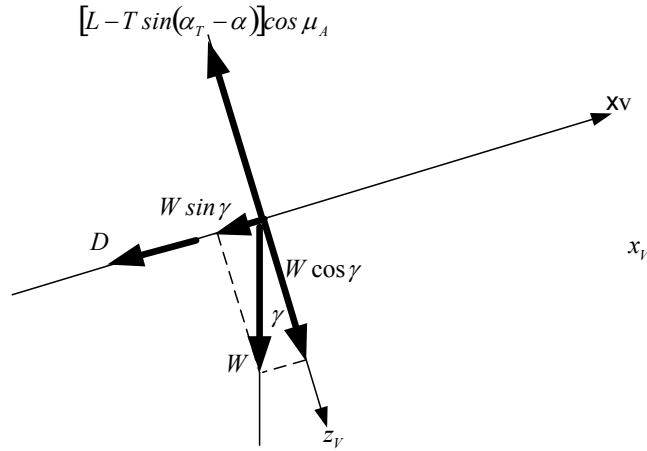
Slika 7-6. Uzgon i pogon u ravnini simetrije zrakoplova

S obzirom na to što nema kuta klizanja, brzina je u ravnini simetrije letjelice, pa pogonska sila koja je također u ravnini simetrije letjelice ima komponentu  $T \cos(\alpha_T - \alpha)$  duž brzine i  $T \sin(\alpha_T - \alpha)$  okomito na brzinu duž osi  $z_V$ , kao na slici 7-6. Tako se duž osi  $z_A$ , u ravnini okomitoj na brzinu (slika 7-7) nalazi sila  $L - T \sin(\alpha_T - \alpha)$ , a ta se sila razlaže na dvije komponente: na komponentu u vertikalnoj ravnini  $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_A$  i na horizontalnu komponentu  $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_A$ .



Slika 7-7. Projektiranje u ravnini okomitoj na brzinu

U vertikalnoj ravnini komponenta  $[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_A$  okomita je na brzinu. U toj ravnini djeluje i težina  $W$  koja se razlaže, kao na slici 7-8, na komponente  $W \sin \gamma$  na pravac brzine ali suprotnoga smjera i  $W \cos \gamma$  okomito na brzinu duž osi  $z_V$ .



Slika 7-8. Vertikalna ravnina kroz brzinu

Sila otpora  $D$  u pravcu je, ali suprotnoga smjera od brzine. Kada zbrojimo to razlaganje sila, dobivamo iste jednadžbe koje smo dobili pomoću matrica transformacija.

#### 7.4.3 Veza između kutova valjanja

Postoji veza između kuta valjanja aerodinamičkog koordinatnog sustava  $\mu_A$  i kuta valjanja zrakoplova  $\phi$ . Možemo je dobiti iz jednakosti

$$\mathbf{L}_{VF} = \mathbf{L}_{VO} \mathbf{L}_{OF}, \quad 7.50$$

ili

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \mu_A & \cos \mu_A & -\cos \alpha \sin \mu_A \\ -\sin \alpha \cos \mu_A & \sin \mu_A & \cos \alpha \cos \mu_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ \sin \gamma \cos \chi & \sin \gamma \sin \chi & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \vartheta c \psi & -c \phi s \psi + s \phi s \vartheta c \psi & s \phi s \psi + c \phi s \vartheta c \psi \\ c \vartheta s \psi & c \phi c \psi + s \phi s \vartheta s \psi & -s \phi c \psi + c \phi s \vartheta s \psi \\ -s \vartheta & s \phi c \vartheta & c \phi c \vartheta \end{bmatrix}$$

Izjednačavanjem članova drugoga retka na lijevoj i desnoj strani poslije množenja dobivamo tri jednadžbe:

$$\sin \alpha \sin \mu_A = \cos \vartheta \sin(\psi - \chi)$$

$$\cos \mu_A = \cos \phi \cos(\psi - \chi) + \sin \phi \sin \vartheta \sin(\psi - \chi)$$

$$-\cos \alpha \sin \mu_A = -\sin \phi \cos(\psi - \chi) + \cos \phi \sin \vartheta \sin(\psi - \chi)$$

Ako drugu jednadžbu pomnožimo sa  $\sin \phi$ , a treću sa  $\cos \phi$ , te ih zbrojimo, dobivamo

$$\cos \mu_A \sin \phi - \cos \alpha \sin \mu_A \cos \phi = \sin \vartheta \sin(\psi - \chi)$$

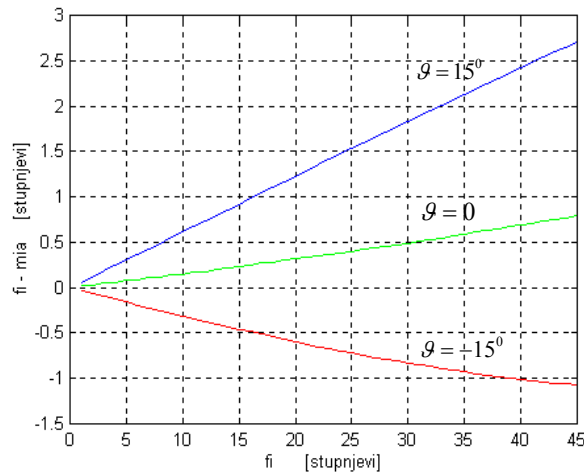
Eliminacijom  $\sin(\psi - \chi)$  iz ove i prve jednačbe, dobivamo

$$\cos \mu_A \sin \phi - \cos \alpha \sin \mu_A \cos \phi = \sin \alpha \sin \mu_A \operatorname{tg} \vartheta$$

odakle je

$$\operatorname{tg} \mu_A = \frac{\sin \phi}{\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \operatorname{tg} \vartheta}. \quad 7.51$$

Ovu jednačbu izveli smo za slučaj kada je kut klizanja  $\beta = 0$ . Sad vidimo da je  $\mu_A = \phi$  samo ako je uz  $\beta = 0$  i napadni kut  $\alpha = 0$  (što je logično).



Slika 7-9. Razlika  $\phi - \mu_A$  ovisno o kutu valjanja  $\phi$ .

Prema toj jednačbi, na slici 7-9 je prikazana razlika  $\phi - \mu_A$  u ovisnosti o kutu valjanja letjelice  $\phi$  (kada nema vjetra i kuta klizanja) za slučaj kada je napadni kut jednak deset stupnjeva ( $\alpha = 10^\circ$ ) a za tri slučaja kuta propinjanja zrakoplova.

#### 7.4.4 Model gibanja središta mase

Model gibanja središta mase određen je jednačbama:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \mu_a \\ mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \mu_a - W \cos \gamma \end{aligned} \quad 7.52$$

Budući da je i u ekstremnim uvjetima razlika  $\phi - \mu_A$  mala, obično se u jednačbama zamjenjuje kut valjanja aerodinamičkog koordinatnog sustava  $\mu_A$  s kutom valjanja letjelica  $\phi$ . U tom slučaju su polazne jednačbe za razmatranje performansi zrakoplova:

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} &= T \cos(\alpha_T - \alpha) - W \sin \gamma - D \\
 mV \cos \gamma \dot{\chi} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \phi \\
 mV \dot{\gamma} &= [L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \phi - W \cos \gamma
 \end{aligned}
 \tag{7.53}$$

Drugo pojednostavljenje proizlazi iz činjenice što se konstrukcijom zrakoplova  $\alpha_T$  bira tako da u horizontalnom letu bude pogonska sila u pravcu brzine leta, a to znači da je  $\alpha_T = \alpha_{rav}$ .

Gornje jednačbe onda imaju jednostavniji oblik:

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\
 mV \frac{d\gamma}{dt} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \\
 mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} &= L \sin \phi
 \end{aligned}
 \tag{7.54}$$

Kada određujemo performanse zrakoplova, obično se služimo ovim modelom. U tom modelu usvajamo da je zrakoplov u ravnotežnom letu, što znači da je ukupni moment propinjanja jednak nuli, odakle je

$$\alpha_{rav} = \frac{M_0}{-M_\alpha} + \frac{M_\delta \delta_m}{-M_\alpha},$$

te je sila uzgona ovisna samo o kormilu visine:

$$L = L_0 + L_\alpha \alpha_{rav} + L_\delta \delta_m
 \tag{7.55}$$

#### 7.4.5 Program gibanja zrakoplova u ravnotežnom letu

Blok-shema programa za izračunavanje putanje središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu prikazana je na slici 7-10. Za konkretan zrakoplov treba prije svega napraviti model motora, tj odrediti ovisnost raspoložive pogonske sile  $T_a$  o brzini leta i parametrima okolne atmosfere (gustoće  $\rho$  i temperature zraka  $T^o$ ), a pogonska sile bit će ovisna o veličini parametra (položaja ručice pogona)  $\delta_p$  i o toj raspoloživoj sili  $T_a$ .

U ovom modelu zanemarujemo bočne koponenate pogonske sile, pa su komponente pogonske sile duž osi zrakoplova:

$$\mathbf{F} = [T \cos \alpha_T \quad 0 \quad T \sin \alpha_T]^T,
 \tag{7.56}$$

a komponente pogonskog momenta su nule jer je  $z_p = 0$ . Jedan takav model motora za male zrakoplove s elisom nalazi se u prilogu C, a model atmosfere nalazi se u prilogu B.

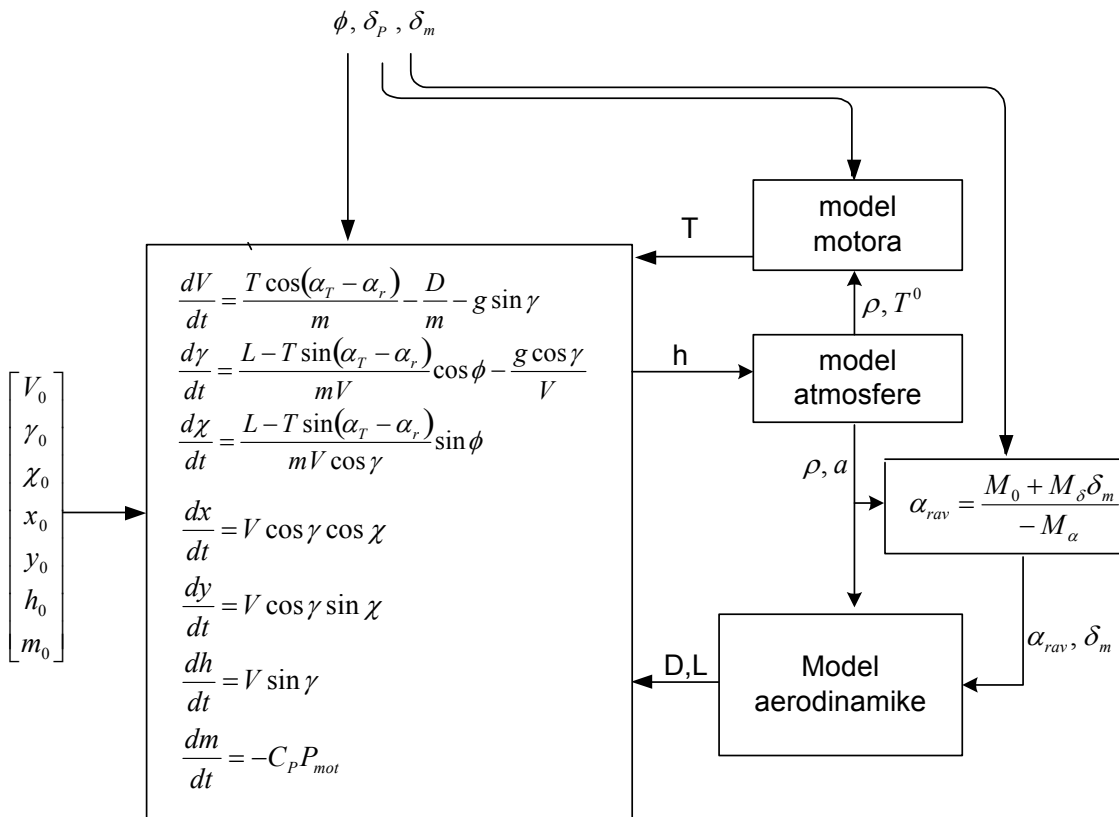
U ovoj shemi koristi se jednostavan model aerodinamike:

$$D = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} (C_{D0} + K C_L^2) \quad 7.57$$

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_L$$

u kome je koeficijent sile uzgona ovisi samo o otklonu kormila visine

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \frac{C_{m0}}{-C_{m\alpha}} + \left( C_{L\delta_m} + \frac{C_{m\delta}}{-C_{m\alpha}} \right) \delta_m \quad 7.58$$



Slika 7-10. Blok-shema zrakoplova kao materijalna točka

Koeficijenti  $C_{D0}, K, C_{L0}, C_{L\alpha}, C_{L\delta_m}, C_{m0}, C_{m\alpha}$  i  $C_{m\delta}$  mogu biti funkcije Machova broja:  $Ma = V/a$ . Kut valjanja  $\phi$  i otklon kormila visine  $\delta_m$  trebaju doći s palice upravljanja, a parametar motora  $\delta_p$  s pedale snage motora.