

8 PERFORMANSE ZRAKOPLOVA

Pod pojmom performanse letjelica razumijevamo neke općenite karakteristike leta u uvjetima zadane energije letjelice kao što su na primjer daljina do koje može zrakoplov letjeti, vrijeme koje može zrakoplov provesti u zraku, maksimalna zakrivljenost putanje, optimalna brzina letjelice i drugo. U svim tim slučajevima ne zanima nas ni stabilnost letjelice, niti njeno ponašanje u određenom trenutku (kao što su npr. njihanja letjelice).

8.1 Horizontalni let

8.1.1 Režim leta

Ako zrakoplov leti u atmosferi bez vjetra, horizontalno ($\gamma = 0$) i pravocrtno ($\dot{\chi} = 0$), onda iz jednadžbi gibanja 7.61

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \frac{d\gamma}{dt} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \\ mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} &= L \sin \phi \end{aligned} \quad 8.1$$

slijedi da mora biti:

$$\begin{aligned} L \sin \phi &= 0 \\ L \cos \phi &= W \end{aligned} \quad 8.2$$

Iz njih zaključujemo da za horizontalni pravocrtni let kut valjanja ϕ zrakoplova mora biti jednak nuli, a normalno opterećenje (*load factor*) mora biti jednako jedinici:

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \\ n &= 1 \end{aligned} \quad 8.3$$

Kako je

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S C_L = W, \quad 8.4$$

slijedi da u horizontalnom letu mora biti

$$V^2 C_L = \frac{2W}{\rho S}. \quad 8.5$$

Svaka kombinacija moguće brzine i mogućeg napadnog kuta koja ispunjava ovaj uvjet horizontalnog leta naziva se *režim horizontalnog leta*, a iz tog uvjeta za horizontalni let slijedi da je brzina leta ovisna o izabranom koeficijentu uzgona:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}, \quad 8.6$$

ili obrnuto, da za izabranu brzinu leta slijedi odgovarajući koeficijent sile uzgona. Međutim, treba uzeti u obzir da zrakoplov ne smije letjeti brzinom manjom od

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{Lmax}}}, \quad 8.7$$

kojoj odgovara najveći mogući koeficijent uzgona, koji zrakoplov postiže pri najvećem dopuštenom napadnom kutu. Za manje brzine bi napadni kut trebao biti još veći, no tada nastaje pad koeficijenta uzgona. Prema tome, mogući su režimi leta brzinom $V > V_{stall}$

8.1.2 Potrebna sila ili potrebna snaga

Ako želimo dodatno da horizontalan pravocrtan let bude i stacionaran, tj. da brzina leta bude konstantna, onda treba biti ispunjen i treći uvjet da pogonska sila bude jednaka otporu:

$$T = D$$

Tu potrebnu pogonsku silu, za izabrani režim leta, označavamo sa T_r (*Thrust required*). Potrebna sila pomnožena s brzinom leta daje potrebnu snagu. Pri određivanju performansi zrakoplova služiti ćemo se jednostavnom polarom zrakoplova te će potrebna sila biti određena jednadžbom

$$T_r = D = \frac{\rho V^2}{2} S (C_{D0} + K C_L^2)$$

U tim jednadžbama, za potrebnu silu ili potrebnu snagu, imamo i koeficijent uzgona C_L i kvadrat brzine leta V (odnosno kub ako je u pitanju potrebna snaga).. Da bismo dobili potrebnu pogonsku silu, odnosno potrebnu snagu, ovisno samo o brzini leta eliminirat ćemo

koeficijent uzgona iz uvjeta da je u horizontalnom letu $C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$:

$$T_r = D = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^2 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} \quad 8.8$$

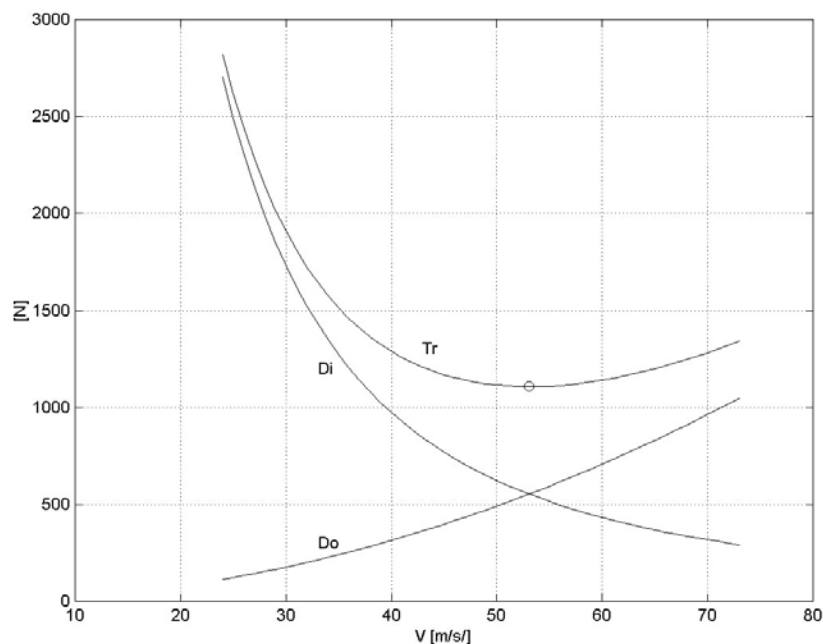
Kako je otpor zraka D u horizontalnom letu ovisan samo o brzini leta V , možemo odrediti režim leta pri kome je potrebna pogonska sila T_r minimalna. Taj problem se može

matematički formulirati tako da se traži minimum funkcije $T_r(V)$ u ovisnosti o brzini leta V . Izjednačavanjem s nulom derivacije jednadžbe 8.8 po brzini V , dobivamo:

$$\frac{\rho S}{2} C_{D0} 2V - 4 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^3} = 0$$

Uz pomoć drugog uvjeta za horizontalni let $W = L$ i poslije sređivanja dobivamo:

$$KC_L^2 = C_{D0}, \quad 8.9$$



Slika 8-1 Potrebna pogonska sila T_r , nulti otpor D_0 i inducirani otpor D_i

što znači da je u režimu za minimalnu silu inducirani otpor jednak otporu pri nultom uzgonu.

Kada iz ove jednadžbe odredimo koeficijent uzgona

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}, \quad 8.10$$

jednadžba za horizontalni let daje nam brzinu leta u tom režimu. Važno je uočiti da je potrebna sila ili potrebna snaga karakteristika letjelice, što je neka vrsta aerodinamičke kvalitete letjelice. Aerodinamički je bolja ona letjelica koja ima manju potrebnu snagu ili manju potrebnu silu.

Potrebna snaga P_r (*Power required*) bit će određena jednadžbom

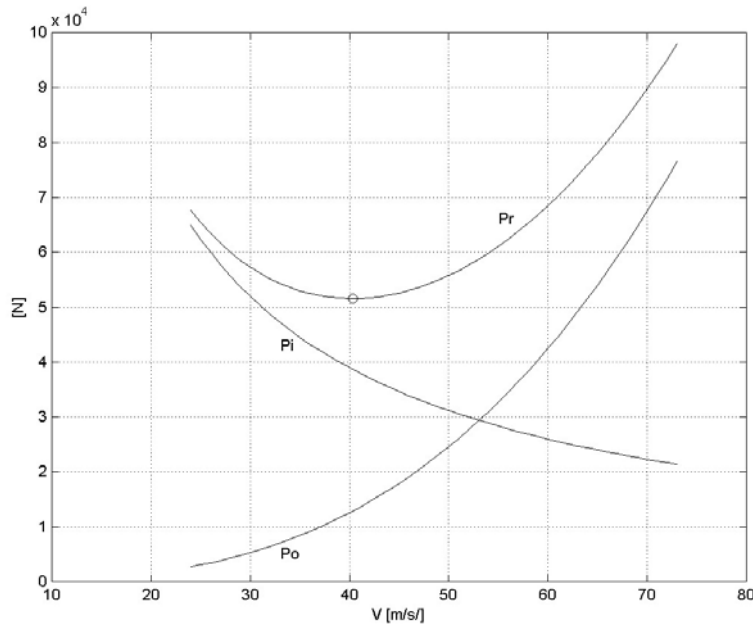
$$P_r = VD = \frac{\rho S}{2} V^3 (C_{D0} + KC_L^2)$$

koja također predstavlja zbroj snage koji je potreban da se svlada parazitski otpor i snage da se svlada inducirani otpor. Kao i za potrebnu silu, postoji režim leta kada je potrebna snaga P_r u minimumu. Eliminacijom koeficijenta uzgona iz uvjeta za horizontalni let:

$$V^2 C_L = \frac{2W}{\rho S}$$

dobivamo ovisnost potrebne snage samo o brzini:

$$P_r = DV = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^3 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V} \quad 8.11$$



Slika 8-2 Potrebna snaga $P_r = VD$, snaga VD_0 i VD_i za "mali" zrakoplov

Derivacijom po brzini leta potrebne snage dobivamo:

$$\frac{d(DV)}{dV} = \frac{\rho S}{2} C_{D0} 3V^2 - 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2}$$

Uočimo da je prvi član na desnoj strani $3D_0$, a drugi točno D_i . Izjednačavanjem ove derivacije s nulom i korištenjem drugoga uvjeta za horizontalni let $L = W$ dobivamo:

$$3 \frac{\rho V^2}{2} S C_{D0} = \frac{KL^2}{\rho V^2} \frac{1}{S}$$

ili

$$KC_L^2 = 3C_{D0}. \quad 8.12$$

To znači da je u režimu leta za minimalnu potrebnu snagu inducirani otpor jednak trostrukoj vrijednosti otpora pri nultom uzgonu. Kada smo odredili koeficijent uzgona C_{LP} koji odgovara ovom režimu leta,

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D0}}{K}}. \quad 8.13$$

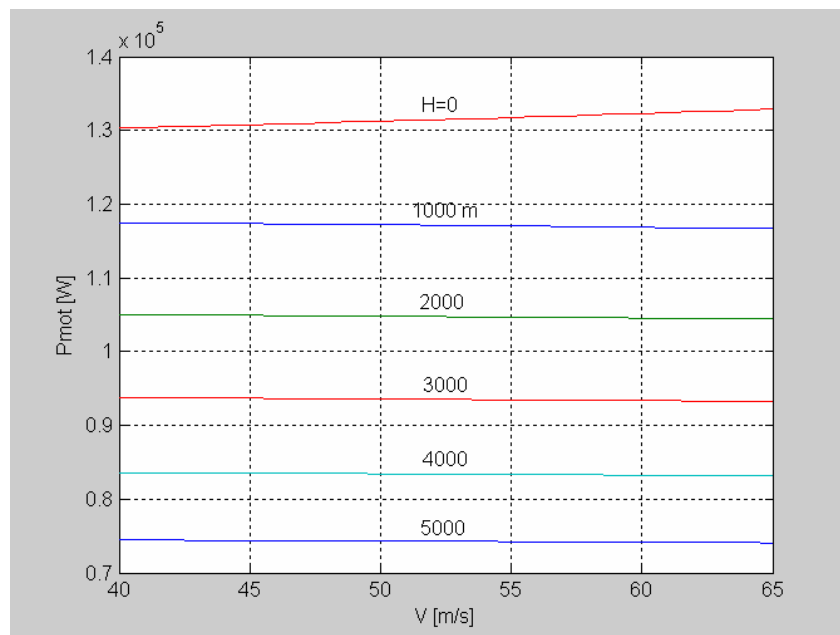
Brzinu leta nalazimo iz uvjeta $L = W$ za horizontalni let:

$$V = \sqrt{\frac{2gm}{\rho S C_L}}. \quad 8.14$$

Tijekom leta smanjuje se masa zrakoplova zbog potrošnje goriva, pa će i brzina potrebna za horizontalan let opadati. Međutim ta promjena mase nije velika. Obično je krajnja masa oko 80% od početne, pa je krajnja brzina oko 0.9 od početne. Za tako mali pad brzine leta ne mijenja se C_{D0} kao ni koeficijent K , pa koeficijent uzgona C_L ostaje konstantan.

8.2 Raspoloživa sila ili snaga

S druge strane, imamo pogon i njegove karakteristike. Ako je pogon zrakoplova pomoću elise, onda motor daje neku snagu elisi P_{mot} . Na slici 8-3 prikazana je snaga motora LYCOMING O-360-A (180 HP).



Slika 8-3. Snaga motora P_{mot} ovisno o brzini leta za razne visine leta.

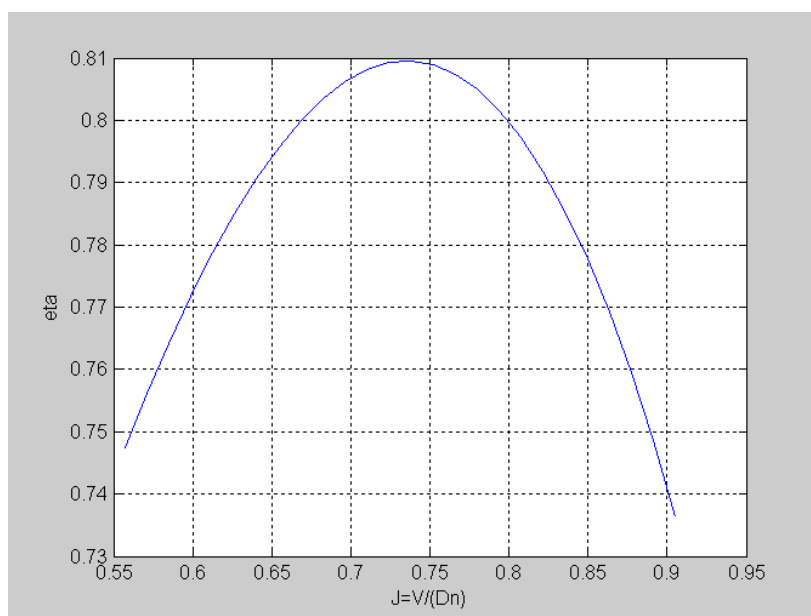
Raspoloživa pogonska snaga P_a (*Power available*) na elisi bit će

$$P_a = \eta_p \cdot P_{mot}$$

Tako i od elise ovisi kakve će biti raspoloživa snaga. Npr. dvokraka elisa konstantnog napadnog kuta zrakoplova Piper Cherokee PA-28, ima koeficijent učinkovitosti η_p koji ovisi o parametru $J = V/(nD)$.

$$\eta_{elise} = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644$$

D je promjer diska elise, a n je broj okretaja elise u sekundi. Ova funkcija $\eta_{elise}(J)$ prikazana je na dijagramu slika 8-4.

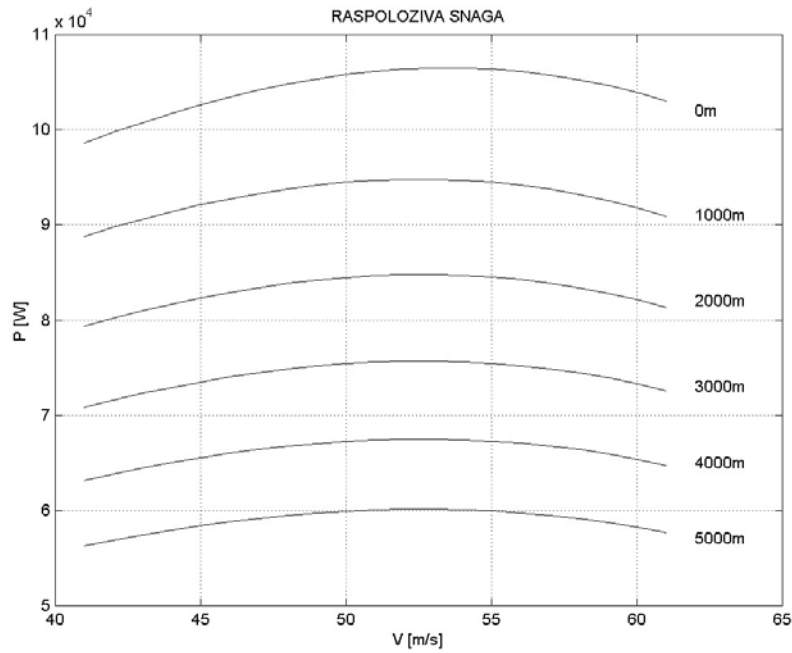


Slika 8-4. Koeficijent učinkovitosti dvokrake elise konstantnog napadnog kuta

Konačno na slici 8-5 prikazan je ovisnost raspoložive snage snage motora i elise

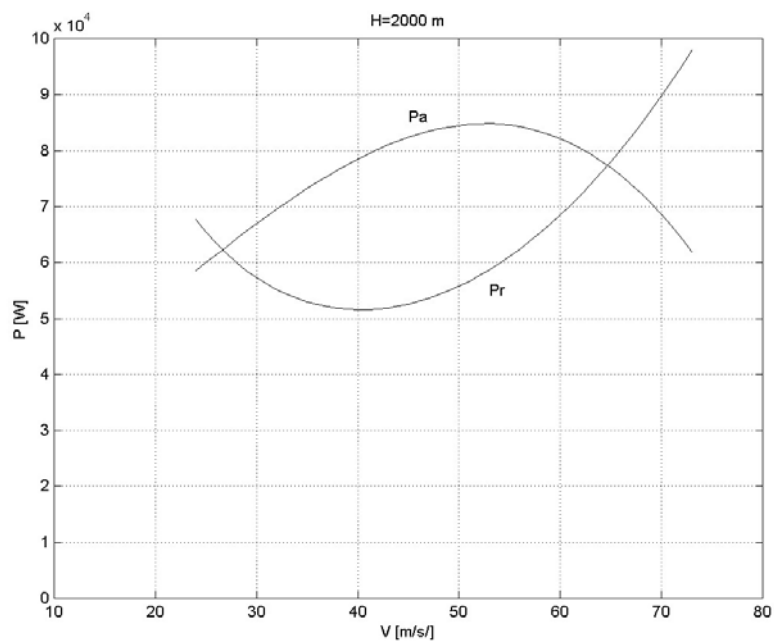
$$P_a = \eta_{elise} \cdot P_{mot}$$

ovisno o brzini leta a za razne visine.



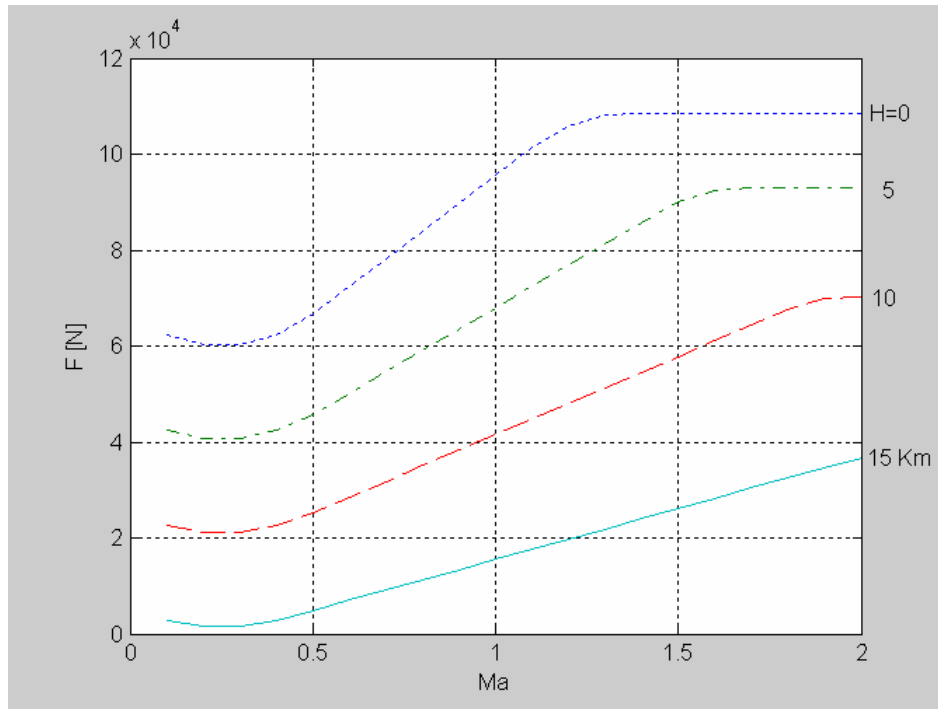
Slika 8-5. Raspoloživa snaga na elisi

Na nekoj odabranoj visini tu raspoloživu snagu $P_a(V)$ ovisno o brzini, možemo je usporediti s potrebnom $P_r(V)$, kao na slici 8-6. Iz te usporedbe dobivamo interval mogućih brzina leta od V_{\min} do V_{\max} s obzirom na pogon.

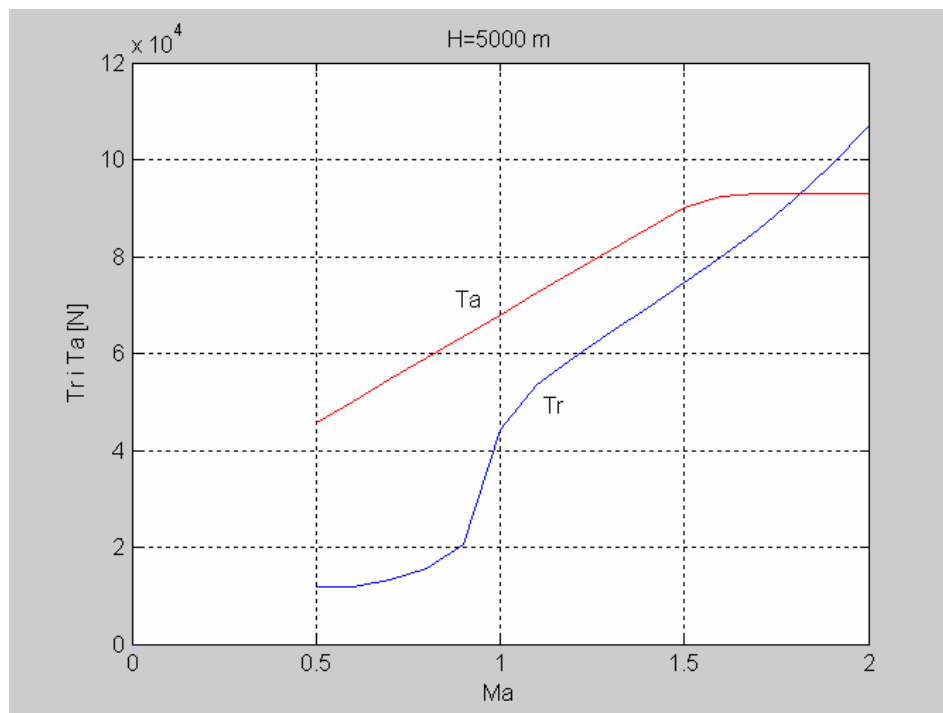


Slika 8-6. Minimalna i maksimalna brzina leta.

u kojem je $P_a > P_r$,



Slika 8-7 Raspoloživa sila jednog mlaznog motora (lovac).



Slika 8-8 Raspoloživa i potrebna sila za lovac na visini 5000 m.

Ako zrakoplov ima mlazni pogon, onda je promatramo raspoloživu silu motora $T_a(V)$ u odnosu na potrebnu silu $T_r(V)$, kao što smo kod elisnih motora promatrali raspoloživu snagu u odnosu na potrebnu snagu. Na slici 8-7 prikazane su krivulje raspoložive pogonske sile za jedan lovac. Na slici 8-8 uspoređena je ta raspoloživa sila tog lovca na visini od 5000 m sa potrebnom silom na istoj visini. Vidimo da s tim motorom lovac može letjeti do brzine $Ma = 1.8$ na toj visini.

8.2.1 Ovojnice

Horizontalni let moguć je samo kada je

$$T_a \geq T_r = D \quad \text{ili} \quad P_a \geq P_r = DV$$

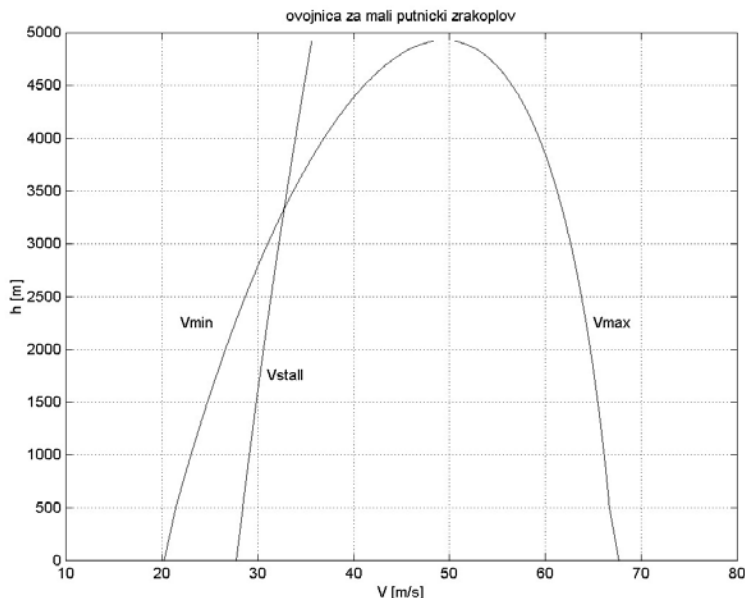
Da bi se odredila najmanja i najveća moguća brzinu leta iz ove jednadžbe, promatrat ćemo najveću raspoloživu snagu motora pri maksimalnom broju okretaja motora. Ta snaga prema dijagramu C-2 (prilog C) ovisi o tlaku okolnog zraka i pada kada taj tlak pada. Isto tako otpor ovisi o gustoći okolnog zraka. Prema tome najmanja i najveća moguća brzina bit će različite za razne visine leta jer su tlak i gustoća različiti. Dijagram koji nam daje V_{\min} i V_{\max} ovisno o visini za standardnu atmosferu predstavlja karakteristiku zrakoplova. Svakako se na taj dijagram moraju unijeti i druga ograničenja, kao npr. V_{stall} , koje je iz istih razloga različito na raznim visinama.

Izjednačavanjem raspoložive potrebne sile T_r i raspoložive sile T_a u uvjetima standardne atmosfere, dobivamo jednadžbu iz koje možemo izračunati V_{\min} i V_{\max} ovisno o visini leta H :

$$\eta(J) \frac{P_{mot}(H, V)}{V} = \frac{\rho S}{2} C_{D0} V^2 + 2 \frac{KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} \quad 8.15$$

Isto se tako iz jednadžbe $L = W$, za najveći mogući koeficijent uzgona $C_{L \max}$, izračunava V_{stall} ovisno o visini, jer gustoća zraka ovisi o visini:

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{L \max}}} \quad 8.16$$



Slika 8-9 Ovojnica za "mali" zrakoplov

Za "mali" zrakoplov nacrtane su krivulje $V_{\min}(H)$, $V_{\max}(H)$ i $V_{stall}(H)$ na slici 8-5. Jasno je da zrakoplov ne smije letjeti s brzinom koja je manja od $V_{\min}(H)$ ili $V_{stall}(H)$, niti može letjeti s brzinom koja je veća od $V_{stall}(H)$. Zato ove krivulje predstavljaju teoretske ovojnice područja režima leta zrakoplova.

8.3 Horizontalni let s konstantnim koeficijentom otpora i uzgona

Da bi takav zrakoplov letio horizontalno s konstantnim koeficijentom uzgona njegova brzina mora se mijenjati ovisno o promjeni mase.

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\rho S} \frac{m}{C_L}}$$

Najveća brzina V_i bit će za početnu masu m_i , a najmanja V_k za krajnju masu m_k . Odnos krajnjeg prema početnom Machovom broju za konstantni koeficijent uzgona tijekom leta je

$$\frac{Ma_k}{Ma_i} = \sqrt{\frac{m_k}{m_i}}$$

jer je brzina zvuka u horizontalnom letu ista. U tom intervalu Machovog broja za mnoge zrakoplove su aerodinamički koeficijenti konstantni ili praktično konstantni, pa je koeficijent uzgona funkcija napadnog kuta. Ako je napadni kut konstantan bit će koeficijent totalnog

otpora konstantan $C_D = C_{D0} + KC_L^2$, zato što je koeficijent nultog otpora konstantan C_{D0} , i zato što je za konstantan napadni kut konstantan koeficijent uzgona. U tom slučaju ako zrakoplov leti horizontalno s konstantnim napadnim kutom on ima tijekom leta konstantan koeficijent totalnog otpora i s konstantan koeficijentom uzgona.

U ovim uvjetima koristimo Breguetovu jednadžbu, određujemo trajanje leta, razmatramo problem maskimalnog doleta i maksimalnog trajanja leta.

8.3.1 Dolet zrakoplova (Breguetova jednadžba)

Dolet zrakoplova jest daljina do koje zrakoplov može letjeti kad se uzme u obzir njegova specifična potrošnja goriva i količina goriva koju nosi. Za vrijeme leta masa zrakoplova m umanjuje se za potrošeno gorivo. Neka je dm promjena mase u vremenskom intervalu dt . Ta promjena mase dm jednaka je produktu vremena dt i derivacije mase po vremenu \dot{m} . Ako sa dR označimo element puta, za vrijeme promjene mase dm , onda je duž tog elementarnog puta

$$\frac{dR}{dm} = \frac{Vdt}{\dot{m}dt} = \frac{V}{\dot{m}} \quad 8.17$$

Jasno je da je ta promjena mase pad mase, tj. da je $\dot{m} < 0$. Masa zrakoplova je zbroj promjenljive mase goriva \dot{m}_f (*fuel*) i konstantnog dijela mase m_c .

$$m = m_c + m_f$$

To znači da je $\dot{m} = \dot{m}_f$, a to je masena potrošnja goriva u jedinici vremena.

Za zrakoplove s elisom potrošnja goriva \dot{m}_f praktički je proporcionalna razvijenoj snazi motora. Zato je $\dot{m} = -C_p P_{mot}$. Koeficijent C_p nazivamo specifična masena potrošnja. On ima dimenziju masenog protoka po jedinici snage [$kg/s/W$]. Raspoloživa snaga motora P_{mot} pomnožena s koeficijentom elise η_p daje raspoloživu pogonsku snagu, ili snagu na elisi $T_a V$. Vidjeli smo da je u horizontalnom ravnotežnom letu konstantnom brzinom:

$$\eta_p P_{mot} = VD$$

te je

$$\dot{m} = -C_p \frac{VD}{\eta_p}$$

$$\frac{dR}{dm} = \frac{V}{\dot{m}} = \frac{V}{-C_p \frac{VD}{\eta_p}} = -\frac{\eta_p}{C_p} \frac{L}{D} \frac{1}{gm}$$

Integrirat ćemo gornju jednadžbu od početka leta kada je masa zrakoplova m_i , do kraja leta kada se masa zrakoplova smanji za masu goriva m_f , te je $m_k = m_i - m_f$:

$$R = \frac{\eta_P}{gC_P} \int_{m_i}^{m_k} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m}$$

za konstantan odnos $\frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2}$ i za brzinu koja se smanjuje tijekom leta da bi

udovoljina uvjet za horizontalan let:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \quad 8.18$$

odnos C_L/C_D može se izvući iz integrala. Integriranjem od početnog stanja i do krajnjeg stanja k dobivamo:

$$R = \frac{\eta_P}{gC_P} \frac{C_L}{C_D} \ln\left(\frac{m_i}{m_k}\right) \quad 8.19$$

Ovo je poznata *Breguetova jednadžba doleta* za zrakoplove s elisnim motorom. Ne zaboravimo da je ona dobivena uz uvjete koji su objašnjeni na početku ovog poglavlja.

Ostaje otvoreno pitanje kolika je ta konstanta vrijednost napadnog kuta tj. koeficijenta uzgona. Možemo ga izabrati da dolet bude najveći, a to znači da odaberemo onu vrijednost koeficijenta uzgona C_L za koju je funkcija

$$f(C_L) = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2}$$

u maksimumu. Izjednačavanjem derivacije ove funkcije po koeficijentu uzgona s nulom

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{1 \cdot (C_{D0} + KC_L^2) - C_L \cdot 2KC_L}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0$$

dobivamo:

$$KC_L^2 = C_{D0}.$$

To znači da trebamo letjeti u režimu leta za najmanji otpor pri kome je inducirani otpor jednak parazitskom otporu. To je logično, zato što je u horizontalnom letu uzgon jednak težini, pa ako je otpor u minimumu bit će odnos uzgona prema otporu najveći.

Za mlazne motore je specifična masena potrošnja goriva proporcionalna pogonskoj sili $\dot{m} = -C_T T$. Taj koeficijent masene potrošnje goriva C_T ima dimenziju masenog protoka po jedinici sile $[kg/s/N]$. U horizontalnom ravnotežnom letu konstantnom brzinom,

pogonska sila T jednaka je otporu D , a uzgon L jednak je težini mg , te se polazna jednadžba transformira u oblik:

$$\frac{dR}{dm} = \frac{V}{\dot{m}} = \frac{V}{-C_T T} = -\frac{V}{C_T} \frac{L}{D} \frac{1}{gm}$$

Normalno je koeficijent masene potrošnje mlaznog motora C_T konstantan, pa se integriranjem te jednadžbe od početka leta do kraja dobiva:

$$R = -\frac{1}{gC_T} \int_{m_i}^{m_k} V \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m};$$

m_i je početna masa zrakoplova, a m_k krajnja masa.

Pretpostavili smo da letimo s konstantnim koeficijentom uzgona a da se tijekom leta brzina mijenja tako da je zadovoljen uvjet horizontalnog leta.

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}.$$

Dolet će onda biti

$$R = -\frac{1}{gC_T} \int_{m_i}^{m_k} \sqrt{\frac{2gm}{\rho S C_L}} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{C_T} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} \int_{m_i}^{m_k} \frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \frac{dm}{\sqrt{m}}$$

Prema usvojenim uvjetima tijekom leta konstantan je koeficijent totalnog otpora i koeficijent uzgona jer ne mijenja napadni kut, te možemo aerodinamičke koeficijente uzvadići ispred integrala. Tako dobivamo

$$R = -\frac{1}{C_T C_D} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} C_L \int_{m_i}^{m_k} \frac{dm}{\sqrt{m}}$$

Integriranjem od m_i do m_k dobivamo dolet leta za zrakoplove s mlaznim motorima

$$R = \frac{2}{C_T C_D} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} C_L (\sqrt{m_i} - \sqrt{m_k}), \quad 8.20$$

ili

$$R = \frac{2}{gC_T} \frac{C_L}{C_D} (V_i - V_k). \quad 8.21$$

To je *Breguetovu jednadžbu doleta* za zrakoplove s mlaznim motorima. Zapamtimo da je ta jednadžba za zrakoplove s mlaznim motorima izvedena uz iste pretpostavke kao za elisni pogon, tj. za uvjete koji su objašnjeni na početku ovog poglavlja.

Breguetova jednadžba za dolet leta može se staviti u oblik:

$$R = \frac{2}{C_T} \sqrt{\frac{2}{g\rho S}} (\sqrt{m_i} - \sqrt{m_f}) \frac{\sqrt{C_L}}{C_{D0} + KC_L^2}$$

Vidimo da dolet leta ovisi o izabranom napadnom kutu tj. usvojenom koeficijentu uzgona, ako je tijekom leta koeficijent otpora konstantan s obzirom da mijenjamo brzinu leta da bi udovoljili uvjet horizontalnog leta. Potražimo maksimum te ovisnosti. Dolet leta bit će najveći kada je funkcija

$$f(C_L) = \frac{\sqrt{C_L}}{C_{D0} + KC_L^2}$$

u maksimumu po C_L :

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{C_L}}(C_{D0} + KC_L^2) - \sqrt{C_L} 2KC_L}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0$$

Odatle dobivamo da je

$$KC_L^2 = \frac{1}{3} C_{D0}. \quad 8.22$$

To znači da je dolet leta zrakoplova s mlaznim motorima u maksimumu ako letimo s napadnim kutom za koje je inducirani otpor jednak trećini parazitskog otpora. Iz ove jednadžbe je

$$C_L = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{C_{D0}}{K}}, \quad 8.23$$

a brzina leta je određena iz uvjeta za horizontalni let, što znači da će ona opadati jer masa zrakoplova opada zbog potrošnje goriva.

8.3.2 Maksimalno trajanje leta (Endurance)

Ponekad nam je potrebno što dulje boraviti u zraku. To je slučaj kada ne možemo sletjeti iz bilo kojih razloga te moramo čekati da se stvore uvjeti za slijetanje. Takvo čekanje treba ostvariti s režimom leta u kome je najveće vrijeme trajanja leta za određenu količinu goriva. Sa E označavamo vrijeme trajanja letenja (*endurance*). To vrijeme jednako je potrebnom vremenu da se masa zrakoplova smanji za masu goriva, jer let traje dok ima goriva:

$$E = \int_i^k dt = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}}$$

I u ovom slučaju treba također odrediti u kojem režimu leta treba letjeti zrakoplov s elisom, a u kojem zrakoplov s mlaznim motorom.

Zrakoplov s elisom ima masenu potrošnju $\dot{m} = -C_p P_{mot}$, gdje je P_{mot} snaga motora. Ta snaga motora pomnožena s koeficijentom elise η_p daje potrebnu snagu koja je jednaka produktu VD . Zato je trajanje leta zrakoplova s elisom:

$$E = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}} = \int_i^k \frac{dm}{-C_p VD / \eta_p} = \frac{\eta_p}{C_p} \int_i^k \frac{1}{V} \frac{L}{D} \frac{dm}{gm} = \frac{\eta_p}{g C_p} \int_i^k \frac{1}{V} \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{m}$$

Za uvjete na početku poglavlja ova jednadžba dobiva oblik

$$E = \frac{\eta_p}{g C_p} \sqrt{\frac{\rho S}{2g}} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \int_k^i m^{-\frac{3}{2}} dm$$

a poslije integracije

$$E = \frac{2\eta_p}{g C_p} \sqrt{\frac{\rho S}{2g}} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \left(\frac{1}{\sqrt{m_k}} - \frac{1}{\sqrt{m_i}} \right) \quad 8.24$$

ili

$$E = \frac{2\eta_p}{g C_p} \frac{C_L}{C_D} \left(\frac{1}{V_k} - \frac{1}{V_i} \right). \quad 8.25$$

Da bi E bilo što veće, trebamo napadni kut odabrati tako da funkcija koeficijenta uzgona

$$f(C_L) = \frac{C_L^{3/2}}{C_D} = \frac{C_L^{3/2}}{C_{D0} + K C_L^2}$$

bude u maksimumu.

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{C_L} (C_{D0} + K C_L^2) - C_L \sqrt{C_L} 2K C_L}{(C_{D0} + K C_L^2)^2} = 0,$$

odakle je

$$K C_L^2 = 3 C_{D0}, \quad 8.26$$

što znači da je inducirani otpor trostruko veći od parazitskog otpora ili da je potrebna snaga u minimumu.

Za zrakoplov s mlaznim motorom izraz za trajanje letenja bit će:

$$E = \int_i^k \frac{dm}{\dot{m}} = \int_i^k \frac{dm}{-C_T T} = -\frac{1}{C_T} \int_i^k \frac{L}{D} \frac{dm}{gm} = -\frac{1}{C_T} \int_i^k \frac{C_L}{C_D} \frac{dm}{gm}$$

Za uvjete s početka ovog poglavlja bit će

$$E = \frac{1}{g C_T} \frac{C_L}{C_D} \ln \left(\frac{m_i}{m_k} \right) \quad 8.27$$

Da bi se postigao maksimum trajanja leta, treba letjeti s napadnim kutom koji će odnos C_L/C_D učiniti maksimalnim. Vidjeli smo da je taj odnos najveći ako je inducirani otpor jednak parazitskom otporu

$$KC_L^2 = C_{D0},$$

a to je slučaj najmanjeg otpora u horizontalnom letu.

8.3.3 Primjeri

Primjer 1

Nacrtati dijagram ovojnica za "mali" zrakoplov (slika 8-5), ako klipni motor, prema prilogu C, ima kutnu brzinu $\omega = 240 \text{ rad/s}$, a elisa ima koeficijent učinkovitosti

$$\eta(J) = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644,$$

gdje je $J = \frac{V}{nD}$ parametar rada elise, n broj okretaja u sekundi, D promjer diska elise.

Najmanja i najveća brzina dobivaju se iz jednadžbe

$$P_a = P_r$$

u kojoj je raspoloživa snaga

$$P_a = \eta(J) \cdot P_{mot}(\omega, V, p, T),$$

jer je za najveću snagu motora tlak punjenja $p_s = p$, a potrebna snaga

$$P_r = V \cdot \left(\frac{\rho V^2}{2} SC_{D0} + \frac{KW^2}{\frac{\rho V^2}{2} S} \right)$$

Krivulje $V_{\min}(H)$ i $V_{\max}(H)$ na slici 8-5 nacrtane su pomoću programa *Ovojnica.m*, koji se nalazi na disketu u direktoriju *Performanse\Horizontalni let*.

Primjer 2

Odrediti za mali putnički zrakoplov otklone kormila visine za režim leta za najveći dolet.

U režimu leta za maksimalni dolet inducirani otpor jednak je parazitskom otporu

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = \sqrt{\frac{0.0259}{0.104}} = 0.499.$$

Kut otklona kormila visine dobivamo iz uvjeta da je koeficijent sile uzgona u ravnotežnom letu $C_L = 0.474$ i da je u ravnotežnom letu ($C_m = 0$)

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_R + C_{L\delta}\delta_m$$

$$0 = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_R + C_{m\delta}\delta_m$$

ili

$$0.499 = 0.249 + 4.73\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m$$

$$0 = -0.002 - 0.822 \cdot \alpha - 0.577 \cdot K_f \delta_m .$$

$$\delta_m = -0.0842 = -4.8^0$$

$$\alpha_r = 0.567 = 3.2^0$$

Primjer 3

Odrediti najveći dolet ako motor radi s 75% snage, na visini 2000 m za potrošenih 200 litara goriva.

U režimu za najveći dolet inducirani otpor jednak je nultom otporu, pa je prema prethodnom primjeru

$$C_L = 0.499$$

$$C_D = 2 \cdot C_{D0} = 2 \cdot 0.0259 = 0.0518$$

Na početku leta masa $m_i = m_L + m_g = 1088$. Tom koeficijentu uzgona i toj masi odgovara brzina horizontalnog leta:

$$V_i = \sqrt{\frac{2 m_i g}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1089 \cdot 9.81}{1.006 \cdot 15.1 \cdot 0.499}} = 53.1 \text{ m/s} ,$$

Specifična masa goriva je 0.720 kg/lit , pa je poslije potrošenih 200 litara masa zrakoplova $m_k = 1089 - 200 \cdot 0.72 = 945 \text{ kg}$. Na kraju leta bit će brzina leta:

$$V_k = \sqrt{\frac{m_k}{m_i}} V_i = \sqrt{\frac{945}{1089}} \cdot 53.1 = 49.5 \text{ m/s} .$$

Prema dijagramu C-5 u prilogu, specifična potrošnja je $0.850 \cdot 10^{-7}$, a u intervalu od $V_k = 49.5$ do $V_i = 53.1$ možemo uzeti da je prosječni koeficijent učinkovitosti elise, prema jednadžbi u primjeru 1, $\eta_{elisa} = 0.81$. Tako dobivamo dolet u tom režimu:

$$R = \frac{\eta_{elisa}}{g C_p C_D} \frac{C_L}{C_D} \ln\left(\frac{m_i}{m_k}\right) = \frac{0.81}{9.81 \cdot 0.850 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{0.499}{0.0518} \cdot \ln\left(\frac{1089}{945}\right) = 1330 \text{ km} .$$

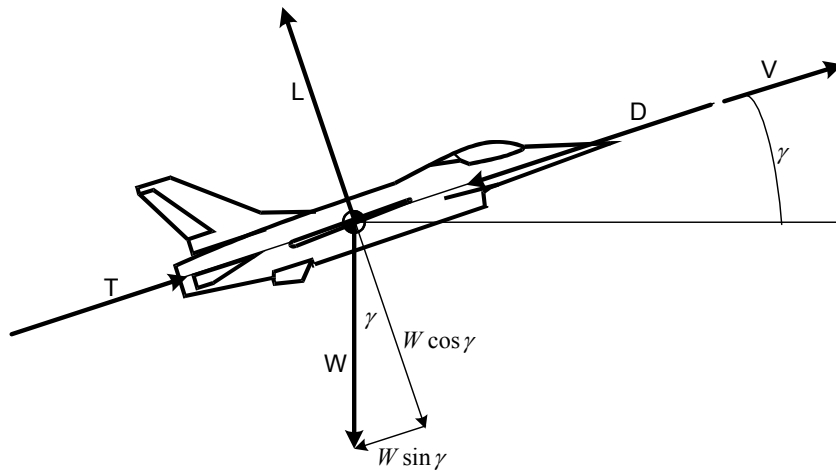
8.4 Stacionarno penjanje i spuštanje zrakoplova

Jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova 7.62 izveli smo na kraju prethodnog poglavlja:

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L \cos \phi - W \cos \gamma$$

$$mV \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} = L \sin \phi$$



Slika 8-10 Zrakoplov u penjanju

Za gibanje u vertikalnoj ravnini kut skretanja χ je konstantan, te iz treće jednadžbe proizlazi da tada nema ni kuta valjanja $\phi = 0$, te ove jednadžbe imaju oblik:

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - W \sin \gamma$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = L - W \cos \gamma$$

8.28

Za pravocrtno ($\gamma = \text{const}$) i stacionarno ($V = \text{const}$) penjanje ili spuštanje bit će

$$T = D + W \sin \gamma$$

$$L = W \cos \gamma$$

Te jednadžbe možemo direktno napisati promatrajući zrakoplov u stacionarnom penjanju. Iz prve jednadžbe su kut penjanja γ i brzina penjanja V_v :

$$\sin \gamma = \frac{T - D}{W} \tag{8.29}$$

$$V_v = V \sin \gamma = V \frac{T - D}{W}$$

Brzina penjanja V_v označava se u zrakoplovnoj praksi s R/C (Rate of Climb), a tangens kuta γ označava se sa G i naziva se gradijent penjanja (Climb Gradient).

Iz jednakosti $L = W \cos \gamma$, koja je potrebna za penjanje (ili spuštanje), nameće se uvjet za penjanje pod kutom γ :

$$\frac{V^2 C_L}{\cos \gamma} = \frac{2W}{\rho S} \tag{8.30}$$

Kojom brzinom leta V , kojim koeficijentom uzgona C_L , te kojim će se kutom γ zrakoplov penjati, nije apriori određeno. Ovdje je problem optimizacije teži od onoga koji je bio u horizontalnom letu. Koriste se dvije mogućnosti optimizacije:

- najveći kut penjanja (Best Angle of Climb)
- najveća brzina penjanja (Best Rate of Climb)

8.4.1 Najveći kut penjanja

U stacionarnom penjanju pod kutom γ potrebna je pogonska sila

$$T_r = D + W \sin \gamma$$

Najprije valja uočiti da više nemamo jednakost otpora i potrebne pogonske sile. Potrebna pogonska sila treba svladati ne samo otpor, već i komponentu težine. Taj otpor u penjanju

$$D = qS(C_{D0} + KC_L^2) = qSC_{D0} + K \frac{L^2}{qS}$$

ne može se izraziti samo kao funkcija brzine, jer on ovisi i o kutu penjanja, zato što više nema jednakosti uzgona i težine već $L = W \cos \gamma$. Eliminacije uzgona, biti će otpor u penjanju pod kutom γ :

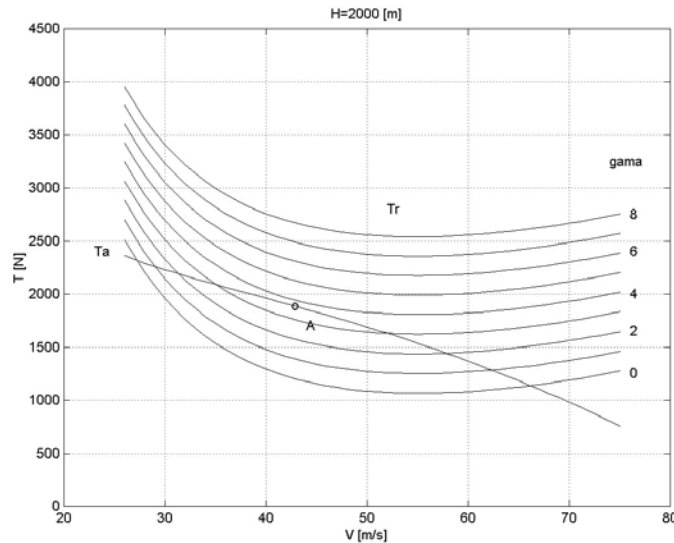
$$D = qSC_{D0} + \frac{K}{q} \frac{W^2 \cos^2 \gamma}{S}$$

te je potrebna sila u penjanju

$$T_r = \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2KW^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} \cos^2 \gamma + W \sin \gamma \tag{8.31}$$

Potrebna sila ovisi o tri parametra. Prvo, o kutu penjanja γ , zatim o brzini leta V i konačno o gustoći zraka. To znači da će na određenoj visini, gdje je gustoća zraka neka određena

vrijednost, potrebna sila ovisi o brzini leta i o izabranom kutu penjanja $T_r(V, \gamma)$. S druge strane imamo raspoloživu silu (ili snagu pogona). Raspoloživa pogonska sila ovisi također o brzini $T_a(V)$ ali ne o kutu penjanja. Ako se pretpostavi da je visina konstantna, može se promatrati dijagram kao na slici 8-7



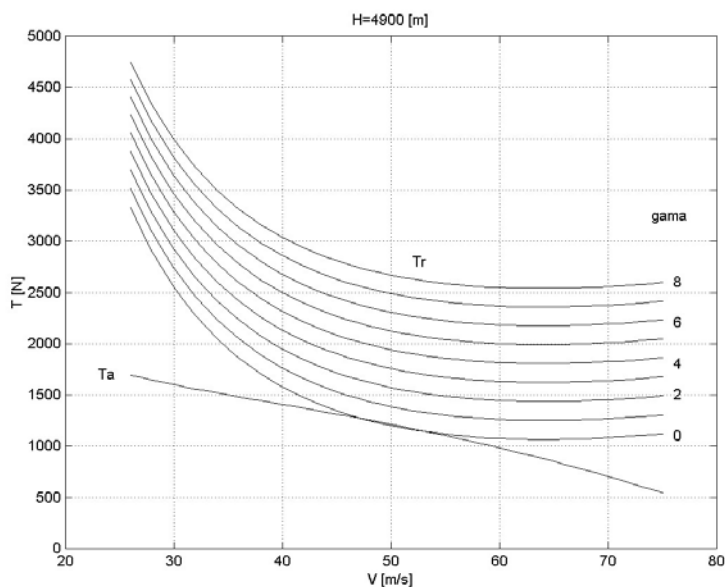
Slika 8-11 Potrebna sila ovisno o brzini leta i kutu penjanja.

na komu su ucrtane krivulje potrebne sile $T_r(V, \gamma)$ za konstantne kutove penjanja (od 0^0 do 9^0). Za neki određeni kut penjanja, u presjeku krivulja $T_r(V, \gamma) = T_a(V)$ dobivamo V_{\min} i V_{\max} , granice intervala mogućih brzina s kojima se može zrakoplov penjati pod tim kutom.

Povećavanjem kuta penjanja, kao što se to vidi sa slike 8-7 taj se interval smanjuje, da bi se za neki određeni kut penjanja te dvije krivulje $T_a(V)$ i $T_r(V, \gamma)$ tangirale u točki A. Kut penjanja ne može biti veći od te vrijednosti, jer pogon ne raspolaže dovoljnom silom, da bi se taj zrakoplov mogao penjati pod većim kutom. Dakle, krivulja $T_r(V, \gamma)$, na kojoj je točka A, određuje najveći kut penjanja, s kojim se taj zrakoplov s tim pogonom može penjati. Označimo taj kut sa *BAC* (*Best angle of climb*). Međutim, ne zaboravimo da smo to rješenje dobili za određenu visinu, što znači da će za drugu visinu biti drugo rješenje za *BAC*, tj. najveći mogući kut penjanja nije konstantan već se mijenja s visinom. Koeficijent uzgona, za taj najveći kut penjanja, nalazimo iz uvjeta da je $L = W \cos \gamma$:

$$C_L = \frac{2W \cos \gamma}{\rho S V^2} \quad 8.32$$

Povećavanjem visine smanjivat će se BAC , tako da će za najveću visinu on biti jednak nuli, jer tada krivulja $T_a(V)$ tangira krivulju $T_r(V)$ za $\gamma = 0$. Tim istim postupkom za isti zrakoplov ali za visinu $h = 5400 \text{ m}$ nacrtana slika 8-9, prema kojoj je dobiven krajnji slučaj mogućega leta i to za $\gamma = 0$, tj. s tim motorom na tom zrakoplovu više se nije moguće penjati.



Slika 8-12 BAC za "mali" zrakoplov na razini mora

Na temelju ove analize vidimo da svakoj visini odgovara neki najveći kut $\gamma_{\max}(h)$ koji se smanjuje s visinom da bi na vrhuncu bio jednak nuli. Isto tako, na svakoj visini imamo odgovarajuću brzinu leta V s kojom trebamo letjeti. To je režim leta s najvećim mogućim kutom penjanja.

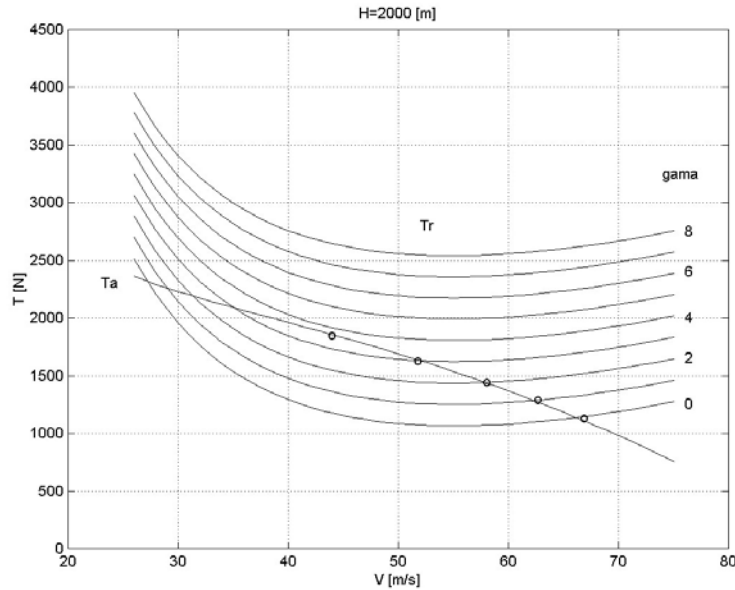
U slučaju zrakoplova s elisom dobivene vrijednosti brzine leta za najveći kut penjanja ili su manje od onih koje su propisane kao minimalne za pravilan i siguran rad elise, ili su tako male da neki drugi efekti dominiraju u penjanju, kao npr. povećani otpor zbog odvajanja struje od elise, pa se zato elisni zrakoplovi obično penju ili spuštaju u režimu najveće brzine penjanja.

8.4.2 Najveća brzina penjanja

Brzina penjanja se definira kao

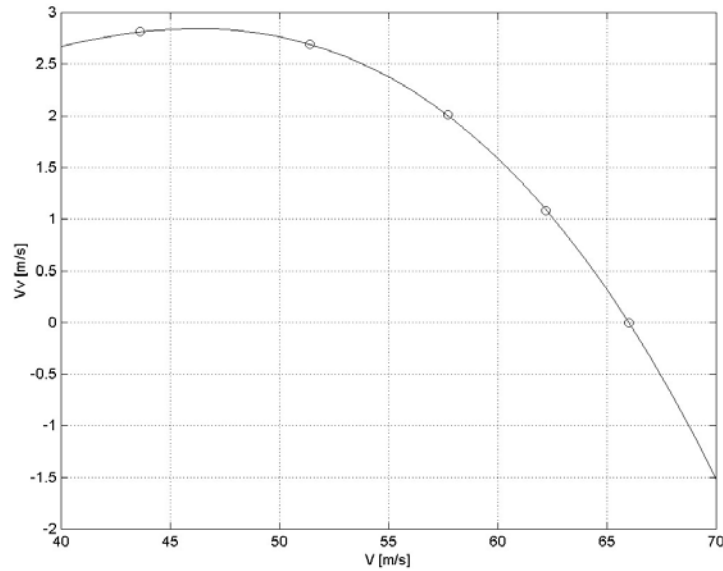
$$\frac{dh}{dt} = V_V = V \sin \gamma . \quad 8.33$$

Za lovce presretače vrlo je važno da u što kraćem vremenu budu na određenoj visini. Taj zahtjev znači da trebaju što veću brzinu penjanja V_V . Brzina penjanja označili smo sa RC , a najveću sa BRC . Jasno je a priori da je BRC različit na različitim visinama.



Slika 8-13 Potrebna sila $T_r(V, \gamma)$ i raspoloživa sila $T_a(V)$, za određenu visinu

Neka su na slici 8-9 nacrtane krivulje potrebne pogonske sile $T_r(V, \gamma)$ i raspoložive pogonske sile $T_a(V)$, za neku određenu visinu za koju je nacrtana slika. Označimo sa $V_{max}(\gamma)$ apscisu točke desnog presjeka krivulje $T_a(V)$ sa krivuljama $T_r(V, \gamma)$. Svaka točka odgovara nekom kutu penjanja i predstavlja maksimalnu brzinu V_{max} koju može postići zrakoplov s tim motorom na tom kutu penjanja. Drugim riječima u svakoj točki dobivamo par vrijednosti V_{max} i γ . Pomoću tih parova možemo nacrtati novi dijagram koji na apscisi ima brzinu leta V , a na ordinati brzinu penjanja $V_V = V_{max} \sin \gamma$. Taj dijagram 8-10 urađen je za onu istu visinu za koju smo nacrtali polazne krivulje na slici 8-9. Taj dijagram pokazuje s kojim se brzinama leta V može penjati zrakoplov i koje će biti brzine penjanja V_V s raspoloživom silom pogona. Ta krivulja je geometrijsko mjesto točaka koje imaju apscisu $V_{max}(\gamma)$ a ordinatu $V_V(\gamma) = V_{max}(\gamma) \cdot \sin \gamma$. Na njenom tjemenu nalazi se točka C koja predstavlja najveću moguću brzinu penjanja.

Slika 8-14 Brzina penjanja $V_v(V)$ za određenu visinu,

U toj točki C određujemo brzinu leta V i kut γ koji osiguravaju najveću brzinu penjanja $V_v = V \sin \gamma$ na visini h za koju smo konstruirali taj dijagram. Koeficijent uzgona određen je jednadžbom $C_L = \frac{2W \cos \gamma}{\rho S V^2}$. Te vrijednosti određuju režim leta BRC za visinu h . Za neku drugu h visinu dobili bi drugu krivulju i druge vrijednosti V, γ potrebne za BRC . Drugim riječima V, γ su funkcije visine h , a samim tim i brzina penjanja $V_v = V \sin \gamma$ i koeficijent sile uzgona $C_L = \frac{2W \cos \gamma}{\rho S V^2}$ isto su poznate funkcije visine.

Primjer

Za mali putnički zrakoplov na visini $H = 2000 \text{ m}$, odrediti režim leta za najveću brzinu penjanja.

Rješenje grafičkom metodom nalazi se u direktoriju *Performanse\Penjanje* pod imenom *BRC1.m* s kojim je nacrtana slika 8.9, a zatim očitane točke nacrtane su pomoću programa *BRC2.m*. S tim programom dobiva se vrijednost $\gamma_{\max} = 3.5^\circ$ za brzinu leta $V_{BAC} = 46.2 \text{ m/s}$ na zadanoj visini.

8.4.3 Vrijeme penjanja i potrošnja goriva u penjanju

Nakon analiza, iz prethodnog odjeljka, o režimu penjanja u mogućnosti smo izračunati vrijeme penjanja. Iz jednadžbe da je

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{V_V}$$

vidimo da će najkraće vrijeme penjanja biti za najveću brzinu penjanja:

$$t_{\min} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{V_{V \max}} \quad 8.34$$

U prethodnom odjeljku odredili smo funkciju $V_{V \max}(h)$. S tom funkcijom $V_{V \max}(h)$ trebamo izračunati ovaj integral.

Potrošnju goriva u penjanja zrakoplova određujemo na temelju jednadžbe

$$\frac{dm}{dh} = -\frac{\dot{m}}{V_V} \quad 8.35$$

u kojoj je za elisne zrakoplove

$$\dot{m} = \dot{m}_g = -C_P P_{mot} = -\frac{C_P T V}{\eta_{elisa}},$$

a za mlazne

$$\dot{m} = \dot{m}_g = -C_T T.$$

U ovim jednadžbama pogonska sila u penjanju određena je jednadžbom

$$T = D + W \sin \gamma = \frac{\rho V^2}{2} (C_{D0} + K C_L^2) + W \sin \gamma$$

u kojoj su $V(h)$ i $\gamma(h)$ određene u prethodnom poglavlju, a $\rho(h)$ je karakteristika atmosfere za vrijeme penjanja.

8.5 Spuštanje

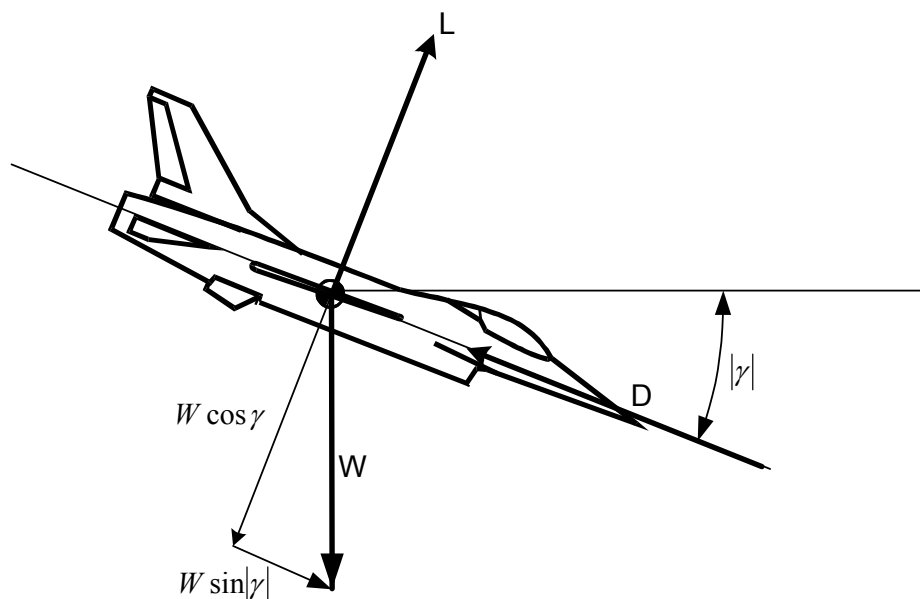
Promatramo zrakoplov u spuštanju s ugašenim motorom. Onda se jednadžbe stacionarnog spuštanja

$$\begin{aligned} T &= D + W \sin \gamma \\ L &= W \cos \gamma \end{aligned}$$

svode na

$$\begin{aligned} W \cos \gamma &= L \\ W \sin |\gamma| &= D \end{aligned}$$

Te jednadžbe smo mogli direktno napisati na spuštanje s konstantnom brzinom V i kutom γ , jer tada sile D , L i W moraju biti u ravnoteži prema d'Alembertovom principu.



Slika 8-15

Dijeljenjem ovih dviju jednadžbi dobivamo

$$\tan|\gamma| = \frac{D}{L} = \frac{C_D}{C_L}$$

Za izabrano C_L dobit ćemo kut spuštanja $|\gamma|$ prema ovoj jednadžbi. Tom kutu odgovara daljnji spuštanje

$$x = \frac{h}{\tan|\gamma|}$$

S tim koeficijentom uzgona i s njemu odgovarajućom kutom bit će brzina leta određena iz jednadžbe

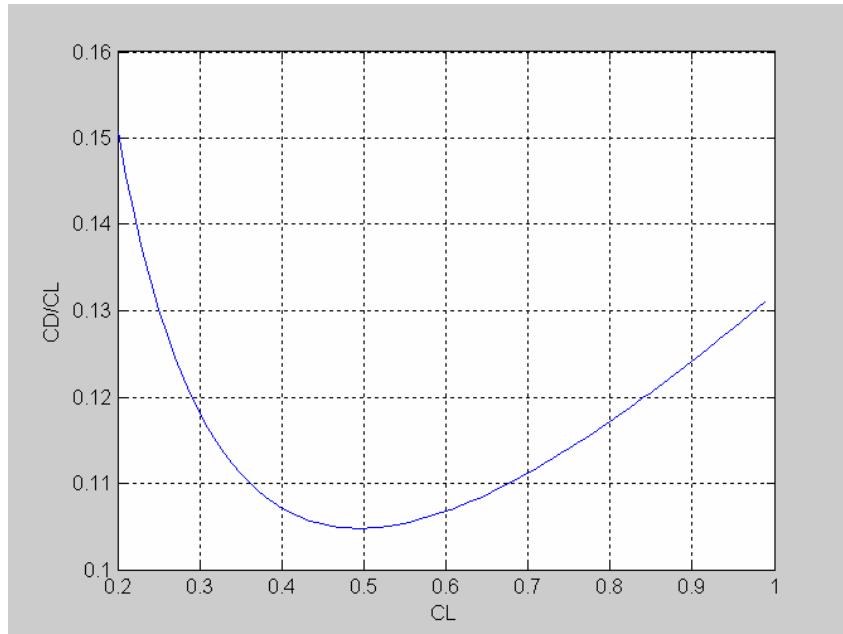
$$W = \sqrt{L^2 + D^2} = V \sqrt{\frac{\rho S_{ref}}{2} (C_D^2 + C_L^2)}$$

$$V = \frac{W}{\sqrt{\frac{\rho S_{ref}}{2} (C_D^2 + C_L^2)}}$$

S obzirom da sve ovisi o izabranom koeficijentu uzgona postavlja se pitanje koji koeficijent uzgona izabrati? Napadni kut treba izabrati tako da odnos C_D/C_L bude najveći. Potražimo taj napadni kut koji funkciju.

$$f = \frac{C_{D0} + KC_L^2}{C_L}$$

Na slici 6-8 nacrtali smo ovu funkciju $f(C_L)$ za slučaj jednog malog putničkog zrakoplova za koji je $C_{D0} = 0.0259$ i $K = 0.106$



Slika 8-16

Vidimo da postoji minimum koji je približno za $C_L \approx 0.5$. Njega možemo i analitički odrediti ako tražimo ekstrem funkcije $f(C_L)$

$$\frac{df}{dC_L} = \frac{2KC_L \cdot C_L - (C_{D0} + KC_L^2)}{C_L^2} = 0$$

Dobivamo poznatu činjenicu da treba biti

$$KC_L^2 = C_{D0}$$

tj. da trebamo letjeti s napadnim kutom za koji je inducirani otpor jednak nultom otporu.

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = \sqrt{\frac{0.0259}{0.106}} = 0.494$$

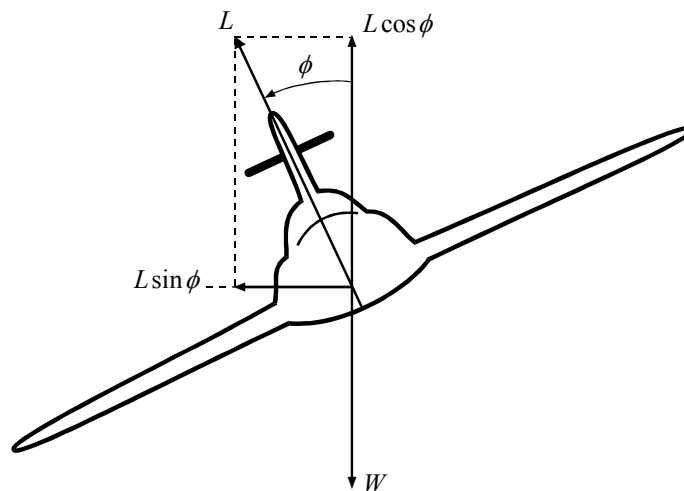
8.6 Horizontalni zaokret

Ako zrakoplov leti

- konstantnom brzinom
- u horizontalnoj ravnini $\gamma = 0$,
- bez kuta klizanja $\beta = 0$, te
- ako je $\alpha_T \approx \alpha_{rav}$ i $\mu_A \approx \phi$,

jednadžbe gibanja centa mase zrakoplova dobivaju oblik:

$$\begin{aligned} 0 &= T - D \\ mV \frac{d\chi}{dt} &= L \sin \phi \\ 0 &= L \cos \phi - W. \end{aligned} \quad 8.36$$



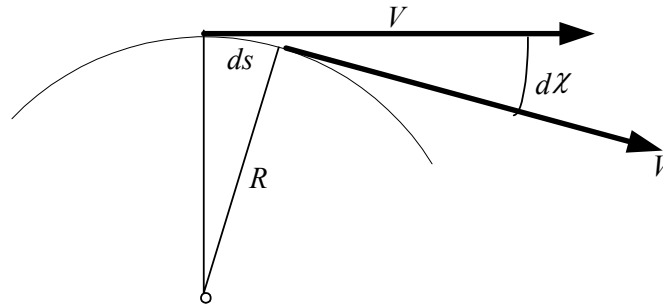
Slika 8-17 Zrakoplov u horizontalnom zaokretu

Do tih jednadžbi može se doći neposredno promatrajući sile koje djeluju na zrakoplov u zaokretu, kao na slici 8-11. Da bi zrakoplov letio u horizontalnoj ravnini, mora biti vertikalna komponenta uzgona jednaka težini:

$$L \cos \phi = W \quad 8.37$$

a horizontalna komponenta stvara centripetalno ubrzanje koje je okomito na brzinu leta:

$$m \frac{V^2}{R} = L \sin \phi, \quad 8.38$$



Slika 8-18

gdje je R polumjer zakrivljenosti putanje središta mase zrakoplova u horizontalnoj ravnini kao na slici 8-12. Podsjetimo se iz mehanike da je kutna brzina vektora brzine

$$\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{d\chi}{ds} \cdot V = \frac{V}{R}, \quad 8.39$$

jer je polumjer zakrivljenosti:

$$R = \frac{ds}{d\chi} \quad 8.40$$

8.6.1 Jednadžbe zaokreta

Prethodne jednadžbe mogu se s normalnim opterećenjem n napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \frac{ng}{V} \sin \phi \\ n &= \frac{1}{\cos \phi} \end{aligned} \quad 8.41$$

Iz ovih jednadžbi eliminacijom kuta valjanja ϕ dobivamo najčešće korištene veze koje nam daju opterećenja u ovisnosti o kutnoj brzini zaokreta, ili obrnuto, kutnu brzinu zaokreta u ovisnosti o opterećenju:

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V}, \quad 8.42$$

ili što je isto

$$n = \sqrt{\left(\frac{\dot{\chi}V}{g}\right)^2 + 1}. \quad 8.43$$

Osim ovih veličina, u praksi je potreban i polumjer zaokreta R . Znajući iz klasične mehanike da je

$$R = \frac{ds}{d\chi} = \frac{V}{\dot{\chi}}, \quad 8.44$$

bit će polumjer u horizontalnom zaokretu ovisan o opterećenju:

$$R = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2 - 1}}, \quad 8.45$$

ili obrnuto, opterećenje bit će ovisno o polumjeru zakrivljenosti:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1} \quad 8.46$$

8.6.2 Ograničenja kutne brzine

Opterećenje ne smije biti veće od onog što može izdržati konstrukcija $n < n_s$. Maksimalno opterećenje koje može izdržati konstrukcija poznata je vrijednost, te kutna brzina ne smije biti veća od:

$$\dot{\chi}_s(V) = \frac{g\sqrt{n_s^2 - 1}}{V} = \frac{const}{V} \quad 8.47$$

Ta jednadžba u dijagramu $V, \dot{\chi}$ ograničava sa gornje strane područje mogućih kutnih brzina u ovisnosti od brzine leta.

Isto tako, koeficijent uzgona ne smije biti veći od maksimalne vrijednosti $C_L \leq C_{L_{max}}(Ma)$. Ako u jednadžbi za kutnu brzinu, izrazimo opterećenje odnosom $n = L/W$, dobivamo utjecaj koeficijenta uzgona na kutnu brzinu:

$$\dot{\chi}(V) = \frac{g}{V} \sqrt{\left(\frac{\rho V^2 S C_L}{2W}\right)^2 - 1}$$

u koju, kada unesemo najveći koeficijent uzgona, dobivamo najveće dopušteno opterećenje s obzirom na *stall*, ovisno o brzini leta:

$$\dot{\chi}_L(V) = g \sqrt{\left(\frac{\rho S C_{L_{max}}}{2W}\right)^2 V^2 - \frac{1}{V^2}} = g \sqrt{const \cdot V^2 - \frac{1}{V^2}} \quad 8.48$$

Ta krivulja također ograničava s gornje strane moguće kutne brzine s obzirom na najveći koeficijent uzgona. Taj maksimalni koeficijent uzgona $C_{L_{max}}$ može biti također ovisan o Mahovu broju.

Vidimo da je najveća moguća kutna brzina ovisno o brzini leta ograničena s gornje strane krivuljama $\dot{\chi}_s(V)$ i $\dot{\chi}_L(V)$. S obzirom na oblik ovih krivulja (krivulja $\dot{\chi}_L(V)$ raste, a krivulja $\dot{\chi}_s(V)$ opada) u njihovu presjeku bit će najveća moguća kutna brzina koja zadovoljava oba ograničenja. Ta kutna brzina se naziva *corner speed*, a brzina leta pri kojoj

se ona ostvaruje označava se sa V_C , kao i odgovarajući Machov broj sa M_C . U presjeku brzina leta dobivamo izjednačavanjem kutnih brzina:

$$\dot{\chi}_L(V) = \chi_S(V)$$

Iz te jednadžbe dobivamo

$$V_C = \sqrt{\frac{2n_S W}{\rho S C_{L \max}}} \quad 8.49$$

a toj brzini leta odgovara kutna brzina *corner speed*

$$\dot{\chi}_{corner\ speed} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L \max}}{2W} \left(n_S - \frac{1}{n_S} \right)} \quad 8.50$$

8.6.3 Koordinirani zaokret

Uočimo da se u zaokretu povećava otpor. Prije zaokreta otpor je bio

$$D = \frac{\rho V^2}{2} S \cdot (C_{D0} + KC_L^2)$$

gdje je koeficijent uzgona bio određen iz uvjeta horizontalnog leta $L = W$. Međutim, u horizontalnom zaokretu taj uvjet se mijenja

$$L = \frac{W}{\cos \phi}$$

Prema tome, u zaokretu je povećan koeficijent uzgona, zbog čega se povećava inducirani otpor. Da ne bi u horizontalnom zaokretu brzina leta opadala, potrebno je povećati pogonsku silu za onoliko koliko se povećao otpor.

U horizontalnom zaokretu polumjera R , brzinom V , vrijednost opterećenja određena je jednadžbom:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR} \right)^2 + 1}.$$

Da bi se ostvario takav zaokret, potrebno je:

- otklonom krilaca δ_ℓ zavaljati letjelicu za kut valjanja

$$\phi = \arccos \frac{1}{n};$$

- otklonom kormila visine δ_m postaviti ravnotežni napadni kut α_{rav} za koji je koeficijent uzgona

$$C_L = \frac{nW}{\frac{\rho V^2}{2} S_{ref}};$$

- otklonom ručice pogona δ_p postići novu potrebnu pogonsku silu koja održava konstantnu brzinu leta.

$$T_r = \frac{\rho V^2}{2} S (C_{D0} + KC_L^2)$$

Za takav koordinirani zaokret moraju se uskladiti: otklon krilaca δ_e , kormila visine δ_m i pogonske sile δ_p . Zato se takav zaokret u kome su usklađene ove tri veličine naziva *koordinirani zaokret*. U njemu se leti sa zadanom konstantnom brzinom, na zadanoj visini i izvodi zaokret sa zadanim polumjerom R .

Kako su faktor opterećenja n , koeficijent uzgona C_L i pogonska sila T ograničeni, bit će ograničen i horizontalni zaokret zrakoplova. Sve tri veličine imaju svoje maksimalne vrijednosti n_s , C_{Lmax} i T_a . Te granice određuju najmanji mogući polumjer zakrivljenosti R , odnosno najveću moguću kutnu brzinu $\dot{\chi}$ u koordiniranom zaokretu za zadanu brzinu leta V na promatranoj visini leta.

8.6.4 Raspoloživo opterećenje u koordiniranom zaokretu

U horizontalnom letu je normalno opterećenje

$$n = \frac{L}{W}$$

bilo jednako jedinici jer je $L = W$. U horizontalnom zaokretu ono se povećava jer je u horizontalnom zaokretu $n = 1/\cos\phi$ i to utoliko više ukoliko je manji polumjer zakrivljenosti

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1}$$

Potrebno normalno opterećenje postiže se povećanjem sile uzgona, odnosno povećanjem ravnotežnog napadnog kuta. Međutim, povećana sila uzgona znači i znatno veći inducirani otpor. Da bi u koordiniranom zaokretu brzina leta ostala nepromijenjena, treba povećati pogonsku silu isto toliko koliko je povećan inducirani otpor. Ta potrebna pogonska sila ne može biti veća od raspoložive, pa se postavlja pitanje za koliko je moguće povećavati normalno opterećenje s obzirom na raspoloživu silu (ili snagu) motora. To najveće

opterećenje nazivamo *raspoloživo opterećenje*. Ono ovisi o brzini leta $n_{rasp}(V)$. Da bi zrakoplov letio konstantnom brzinom leta V potrebna je sila

$$T_r = \frac{\rho V^2}{2} S \cdot \left[C_{D0} + K \left(\frac{L}{\frac{\rho V^2}{2} S} \right)^2 \right].$$

Kako je $L = nW$, ta potrebna sila ovisi o normalnom opterećenju

$$T_r = \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(nW)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} \quad 8.51$$

Raspoloživa sila T_a mora biti veća od potrebne, ili u najgoremu slučaju jednaka potrebnoj, pa izjednačavanjem potrebne i raspoložive sile dobivamo

$$\frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(nW)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} = T_a, \quad 8.52$$

ili

$$n_{rasp}^2 = \frac{T_a \rho S}{2KW^2} V^2 - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^4. \quad 8.53$$

Ova jednadžba direktno je primjenljiva za mlazne zrakoplove. Za elisne zrakoplove raspoloživa sila ovisno od raspoložive snage određena je jednadžbom:

$$T_a = \frac{P_a}{V} = \frac{\eta_{elisa} P_{mot \max}}{V} \quad 8.54$$

Zato raspoloživo opterećenje za elisne zrakoplove određujemo pomoću jednadžbe:

$$n_{rasp}^2 = \frac{\eta_{elisa} P_{mot \max} \rho S}{2KW^2} V - \frac{(\rho S)^2 C_{D0}}{4KW^2} V^4 \quad 8.55$$

Ovisnost raspoloživog opterećenja o brzini leta bit će različita na različitim visinama zato što ovisi i o gustoći zraka. Ovisnost normalnog opterećenja o brzini leta $n_{rasp}(V)$ ima maksimalnu vrijednost za brzinu leta koju dobivamo derivacijom funkcije $n_{rasp}(V)$.

8.6.5 Najveća kutna brzina u koordiniranom zaokretu

Kutna brzina je određena jednadžbom

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2-1}}{V}$$

i bit će utoliko veća ukoliko je veće opterećenje, pa zato promatramo kutnu brzinu pri raspoloživom opterećenju.

$$\dot{\chi}_P = \frac{g\sqrt{n_{rasp}^2 - 1}}{V} \quad 8.56$$

Ta kutna brzina ovisi o brzini leta direktno i indirektno preko $n_{rasp}(V)$. Da bismo odredili najveću kutnu brzinu ovisno o brzini leta, zamijenimo raspoloživo opterećenje s njegovom funkcijom o brzini leta. Ako je u pitanju mlazni zrakoplov, raspoloživo opterećenje n_{rasp} određeno je jednadžbom 8.55, te dobivamo ovisnost $\dot{\chi}(V)$:

$$\dot{\chi} = g\sqrt{\frac{A}{V} - BV^2 - \frac{1}{V^2}} \quad 8.57$$

s konstantama kao u jednadžbi 8.55.

Za elisne zrakoplov, raspoloživo opterećenje n_{rasp} određeno je jednadžbom 8.57 što daje ovisnost $\dot{\chi}(V)$:

$$\dot{\chi} = g\sqrt{A - BV^2 - \frac{1}{V^2}} \quad 8.58$$

u kojoj su konstante kao u jednadžbi 8.57. Tu ovisnost $\dot{\chi}(V)$ nazivamo ovojnica koordiniranog zaokreta zrakoplova. Ona ima maksimum za brzinu leta $V_{max(\dot{\chi})}$, pri kojoj je najveća moguća kutna brzina leta $\dot{\chi}_{max}$ u koordiniranom zaokretu.

8.6.6 Najmanji polumjer zaokreta

Iz jednadžbi horizontalnog zaokreta:

$$n = \sqrt{\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{\rho V^2}{2} SC_L = nW,$$

eliminacijom brzine dobivamo ovisnost polumjera zaokreta o opterećenju n :

$$R = \frac{2W}{g\rho SC_L} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad 8.59$$

Polumjer zaokreta ovisi o koeficijentu uzgona i o opterećenju. Za najmanji zaokret treba najveći koeficijent uzgona i najveće opterećenje. Zato se najmanji polumjer zaokreta ostvaruje u režimu leta za *corner speed*. Za najveći koeficijent sile uzgona C_{Lmax} i najveće strukturalno opterećenje n_s dobivamo najmanji polumjer koji odgovara najvećoj kutnoj brzini (*corner speed*):

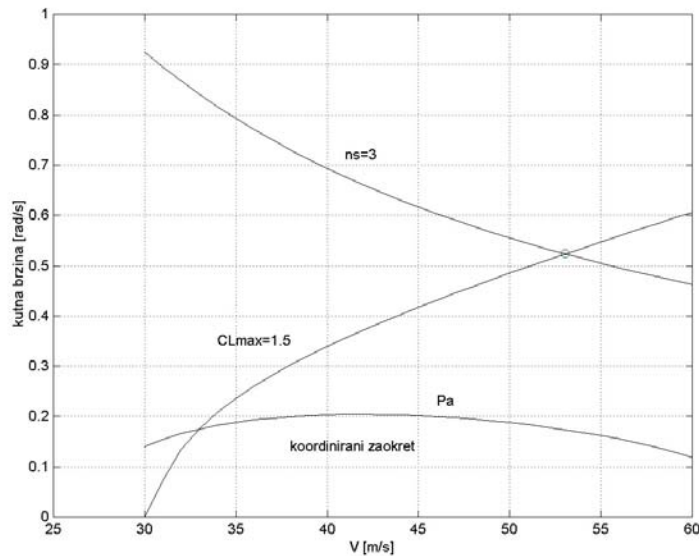
$$R_c = \frac{2W}{g\rho S C_{L\max}} \frac{n_s}{\sqrt{n_s^2 - 1}} \quad 8.60$$

8.6.7 Primjer

Odrediti za mali zrakoplov koji leti na visi 2000 m kolika je ovisno o brzini leta :

- raspoloživa kutna brzina u koordiniranom zaokretu s obzirom na performanse motora iz priloga C,
- raspoloživa kutna brzina ovisno s obzirom na maksimalni koeficijent uzgona $C_L = 1.5$ i
- raspoloživa kutna s obzirom na maksimalno strukturalno naprezanje $n_s = 3$.

Prema prilogu C napravljen je pod program *Rasp_snaga* koji daje raspoloživu snagu motora ovisno o kutnoj brzini elise, brzine leta, temperaturi i tlaku okolnog zraka. Nominalni broj obrtaja motora je $\omega = 240$ [rad/s].



Slika 8-19. Ograničenja kutnih brzina malog zrakoplova

Izjednačavanjem potrebne i raspoložive snage $P_r = P_a$ dobivamo:

$$\frac{\rho S C_{D0}}{2} V^2 + \frac{2K(n_{rasp}W)^2}{\rho S} \frac{1}{V^2} = \frac{P_a}{V}$$

Iz ove je jednadžbe kvadrat raspoloživog opterećenja:

$$n_{\text{rasp}}^2 = \frac{\rho S}{2KW^2} \left(P_a V - \frac{\rho S C_{D0}}{2} V^4 \right),$$

S ovim raspoloživim opterećenjem određujemo najveću kutnu brzinu $\dot{\chi}_P$ u koordiniranom zaokretu, prema jednadžbi 8.58.

$$\dot{\chi}_P = \frac{g \sqrt{n_{\text{rasp}}^2 - 1}}{V}$$

Na disketi u direktoriju performanse nalazi se program *Maxkutbr.m* koji crta u MATLABu krivu $\dot{\chi}_P(V)$ kao i dvije krive $\dot{\chi}_L(V)$ prema jednadžbi 8.50 i $\dot{\chi}_S(V)$ prema jednadžbi 8.49 u čijem presjeku C se nalazi najveća moguća kutna brzina (*corner speed*). Taj presjek ima koordinate. Na slici 8-13 prikazan je dijagram dobiven tim programom.

8.7 Vertikalni zaokret

8.7.1 Jednadžbe

Jednadžbe gibanja središta mase s kojima određujemo performanse zrakoplova:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \cos \gamma \dot{\chi} &= L \sin \phi \\ mV\dot{\gamma} &= L \cos \phi - W \cos \gamma \end{aligned} \quad 8.61$$

u slučaju zaokreta u vertikalnoj ravnini $\dot{\chi} = 0$ dobivaju oblik

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - D - W \sin \gamma \\ 0 &= L \sin \phi \\ mV\dot{\gamma} &= L \cos \phi - W \cos \gamma, \end{aligned}$$

pa iz druge jednadžbe zaključujemo da u slučaju vertikalnog zaokreta mora biti $\phi = 0$, tj. da nema valjanja. Prva i treća jednadžba postaju:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV \frac{d\gamma}{dt} &= L - W \cos \gamma \end{aligned} \quad 8.62$$

Iz druge jednadžbe je

$$\frac{V}{g} \dot{\gamma} = n - \cos \gamma. \quad 8.63$$

Kako je $V = R\dot{\gamma}$, ova jednadžba daje vezu između polumjera krivine i normalnog opterećenja

$$n = \frac{V^2}{gR} + \cos \gamma \quad 8.64$$

8.7.2 Najveća kutna brzina

Kao i za horizontalni zaokret, i ovdje je kutna brzina ograničena najvećim konstruktivnim opterećenjem n_s :

$$\dot{\gamma}_s(V) = g \frac{n_s - \cos \gamma}{V}. \quad 8.65$$

Zamjenom opterećenja prema definiciji

$$n = \frac{\rho V^2 S C_L}{2W}$$

dobivamo jednadžbu za kutnu brzinu u ovisnosti o koeficijentu uzgona:

$$\dot{\gamma}(V) = g \left(\frac{\rho S C_L}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right).$$

Iz toga je očito da je najveća kutna brzina ovisno o maksimalnom koeficijentu uzgona dana jednadžbom:

$$\dot{\gamma}_L(V) = g \left(\frac{\rho S C_{L \max}}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right) \quad 8.66$$

U presjeku tih dviju ovisnosti $\dot{\gamma}_s(V)$ i $\dot{\gamma}_L(V)$:

$$g \frac{n_s - \cos \gamma}{V} = g \left(\frac{\rho S C_{L \max}}{2W} V - \frac{\cos \gamma}{V} \right)$$

$$\frac{n_s}{V_C} = \frac{\rho S C_{L \max}}{2W} V_C$$

dobiva se brzina leta V_C :

$$V_C = \sqrt{\frac{2n_s W}{\rho S C_{L \max}}}, \quad 8.67$$

pri kojoj se može ostvariti najveća kutna brzina u vertikalnoj ravnini. Ta brzina ne ovisi o kutu γ što znači da se bilo u kojemu nagibu putanje može dobiti najveća kutna brzina propinjanja pri ovoj brzini leta. Činjenica je da je to ista brzina pri kojoj se može ostvariti i u horizontalnom zaokretu najveća kutna brzina (*corner speed*). U vertikalnom zaokretu bit će ta najveća kutna brzina (*corner speed*):

$$\dot{\gamma}_{\max} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L \max}}{2W} \frac{n_s - \cos \gamma}{\sqrt{n_s}}} \quad 8.68$$

Ta kutna brzina ovisi o kutu penjanja. Zanimljivo je usporediti ovu maksimalnu kutnu brzinu u vertikalnoj ravnini s kutnom brzinom u horizontalnoj ravnini (jednadžba 8.55)

$$\dot{\chi}_{corner\ speed} = g \sqrt{\frac{\rho S C_{L\max}}{2W} \left(n_S - \frac{1}{n_S} \right)}$$

Ako zrakoplov leti horizontalno onda je odnos kutnih brzina u vertikalnom zaokretu prema horizontalnom zaokretu:

$$\frac{\dot{\gamma}_{\max}}{\dot{\chi}_{\max}} = \sqrt{\frac{n_S - 1}{n_S + 1}} \quad 8.69$$

8.7.3 Analiza vertikalne petlje

Da bismo pojednostavili analizu vertikalne petlje, pretpostavimo da je u svakom trenutku raspoloživa sila jednaka otporu. Jednadžbe se pojednostavnjuju:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -g \sin \gamma \\ V \frac{d\gamma}{dt} &= gn - g \cos \gamma \end{aligned} \quad 8.70$$

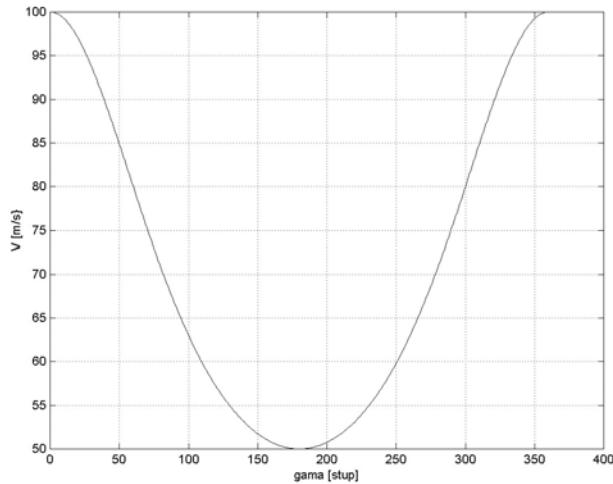
Eliminacijom vremena iz ovih dviju jednadžbi, dobivamo:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\sin \gamma}{n - \cos \gamma} d\gamma \quad 8.71$$

Ako zrakoplov sve vrijeme leta u petlji ima isto opterećenje, onda poslije integracije od polazne točke $\gamma = 0$ u kojoj je brzina leta V_0 do bilo koje točke, dobivamo:

$$V = V_0 \frac{n-1}{n - \cos \gamma} \quad 8.72$$

Ova ovisnost $V(\gamma)$ prikazana je na slici 8-14.



Slika 8-20 Promjena brzine u petlji

U ovakvom letu zrakoplov bi imao najmanju brzinu na vrhuncu petlje

$$V_{\min} = V_0 \frac{n-1}{n+1}, \quad 8.73$$

Jednadžbu 8.66 možemo napisati u obliku

$$R = \frac{V^2}{g(n - \cos \gamma)}$$

Ona daje veličinu polumjera petlje R ovisno o brzini leta u petlji V i nagibu brzine γ .

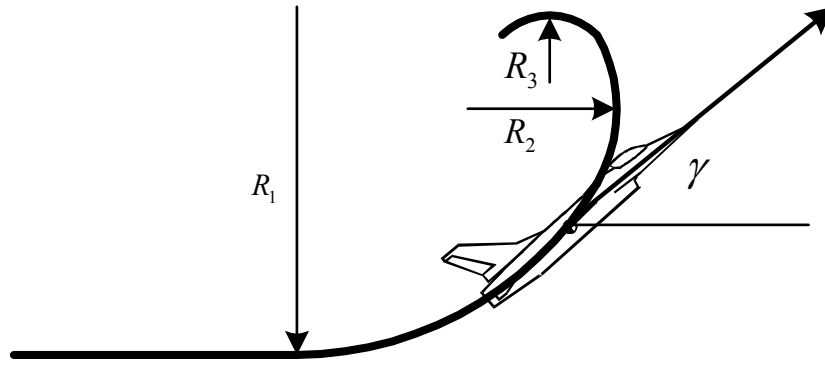
Zamjenom $V(\gamma)$ prema jednadžbi 8.74 u jednadžbu 8.66 dobivamo ovisnost polumjera petlje samo o nagibu tangente.

$$R = \frac{V_0^2}{g} \frac{(n-1)^2}{(n - \cos \gamma)^3}$$

Iz ove jednadžbe možemo za razne položaje odrediti polumjer krivine petlje Tako je u tablici izračunat polumjer krivine za petlju u kojoj je opterećenje $n = 3$, a za tri karakteristična položaja zrakoplova.

$\gamma = 0$	$\gamma = 90^0$	$\gamma = 180^0$
$R = 0.5 \frac{V_0^2}{g}$	$R = 0.148 \frac{V_0^2}{g}$	$R = 0.0625 \frac{V_0^2}{g}$

Na slici 8.15 prikazan je približan izgled ove petlje.



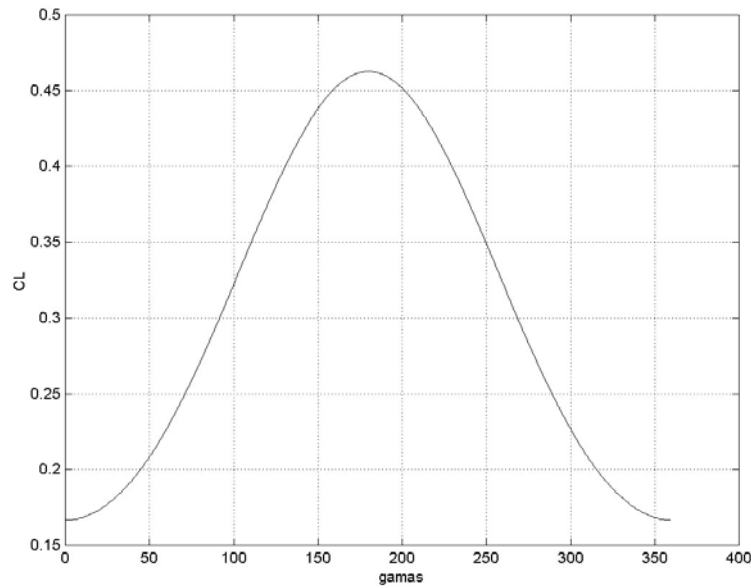
Slika 8-21. Zrakoplov u vertikalnoj petlji

Da bi zrakoplov sve vrijeme petlje imao konstantno normalno opterećenje u uvjetima promjenljive brzine, on mora mijenjati napadni kut tako da se koeficijent uzgona mijenja ovisno o kutu γ :

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\rho S}{2W} C_L V^2$$

$$C_L = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2 (n-1)^2} (n - \cos \gamma)^2 \quad 8.74$$

Ta promjena koeficijenta uzgona prikazana je na dijagramu slike 8-16



Slika 8-22

Minimalna vrijednost koeficijenta uzgona je na ulazu u petlju ($\gamma = 0$)

$$C_{L0} = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2},$$

a maksimalna na vrhuncu petlje:

$$C_{L1} = \frac{2Wn}{\rho S V_0^2} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^2 \quad 8.75$$

U vrhuncu petlje centrifugalna sila jednaka je zbroju uzgona i težine zrakoplova,

$$\frac{W}{g} \frac{V^2}{R} = W + L$$

jer je $\gamma = 180^\circ$, pa je polumjer zakrivljenosti $R = \frac{V^2}{g(n+1)}$.