10 UKUPNA ENERGIJA

10.1 Energetska jednadžba

U osmom poglavlju izveli smo jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu. U ovom poglavlju primijenit ćemo zakon o očuvanju ukupne energije na te jednadžbe, u slučaju kad je $\alpha \approx \alpha_T$ i kad nema vjetra:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T - W\sin\gamma - D \\ mV\cos\gamma\,\dot{\chi} &= L\sin\phi \\ mV\dot{\gamma} &= L\cos\phi - W\cos\gamma \end{aligned} \qquad 10.1$$

Prvoj jednadžbi ovog sustava pridružit ćemo jednadžbu koja definira brzinu penjanja kao derivaciju visine leta

$$\begin{aligned} \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} &= T - D - W\sin\gamma \\ \frac{dh}{dt} &= V\sin\gamma \end{aligned}$$

Eliminacijom kuta γ dobivamo

$$\frac{d}{dt}\left(h + \frac{V^2}{2g}\right) = \frac{VT - VD}{W}.$$

Uvedimo oznaku

$$h_e = h + \frac{V^2}{2g}$$

Zbroj potencijalne i kinetičke energije:

$$E = mgh + \frac{mV^2}{2} = W \cdot h_e$$

predstavlja ukupnu energiju (*energy state*) zrakoplova. To znači da je h_e ukupna energija svedena na jedinicu težine zrakoplova. Nazivamo je *specifična energija* (*specific energy*). Ona predstavlja određenu visinu do koje se zrakoplov može podići, polazeći od stvarne visine i koristeći svoju kinetičku energiju sve dok je posve ne potroši. Zbog toga se ona naziva i energetska visina (*energy high*) i mjeri se u metrima. Za višak snage sveden na jedinicu težine uvodimo oznaku:

$$P_S = \frac{VT - VD}{W} \qquad 10.2$$

Nazivamo je *višak specifične snage* . Ta funkcija ima dimenziju brzine [m/s]. Konačno se pomoću tih varijabla može energetska jednadžba napisati u obliku

$$\frac{dh_e}{dt} = P_S \,. \qquad 10.3$$

Ova jednadžba pokazuje da je derivacija specifične energije jednaka višku specifične snage.

10.2 Specifična snaga zrakoplova

10.2.1 Jednadžba specifičnog viška snage

Otpor je ovisan o brzini leta, o normalnom opterećenju i o svojstvima zraka (prije svega o gustoći):

$$D = qS\left(C_{D0} + KC_L^2\right) = qSC_{D0} + \frac{K(nW)^2}{qS} \qquad 10.4$$

Zamijenimo li tu ovisnosti otpora u specifični višak snage i poslije dijeljenja s težinom, dobivamo

$$P_S = \frac{VT}{W} - \frac{\rho S}{2W} C_{DO} V^3 - 2n^2 \frac{KW}{\rho S} \frac{1}{V} \qquad 10.5$$

Raspoloživa pogonska sila T , ili raspoloživa pogonska snaga *VT*, veličine su koje predstavljaju pogonsku grupu zrakoplova. One su poznate zadane funkcije Machova broja *Ma* ili brzine leta V ($V = a \cdot Ma$) i svojstva zraka.

Da bismo izračunali brojčanu vrijednost specifičnog viška snage trebamo energetskoj jednadžbi pridružiti aerodinamičke funkcije $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$, funkciju raspoloživog pogona $T(Ma,h)$ ili $P(Ma,h)$ i konačno jednadžbe svojstva atmosfere $a(h)$ i $\rho(h)$. Cjelokupan sustav jednadžbi koji definira funkciju $P_S(Ma,h,n)$ ima oblik:

$$P_S = \frac{VT}{W} - \frac{\rho S}{2W} C_{DO} V^3 - 2n^2 \frac{KW}{\rho S} \frac{1}{V}$$

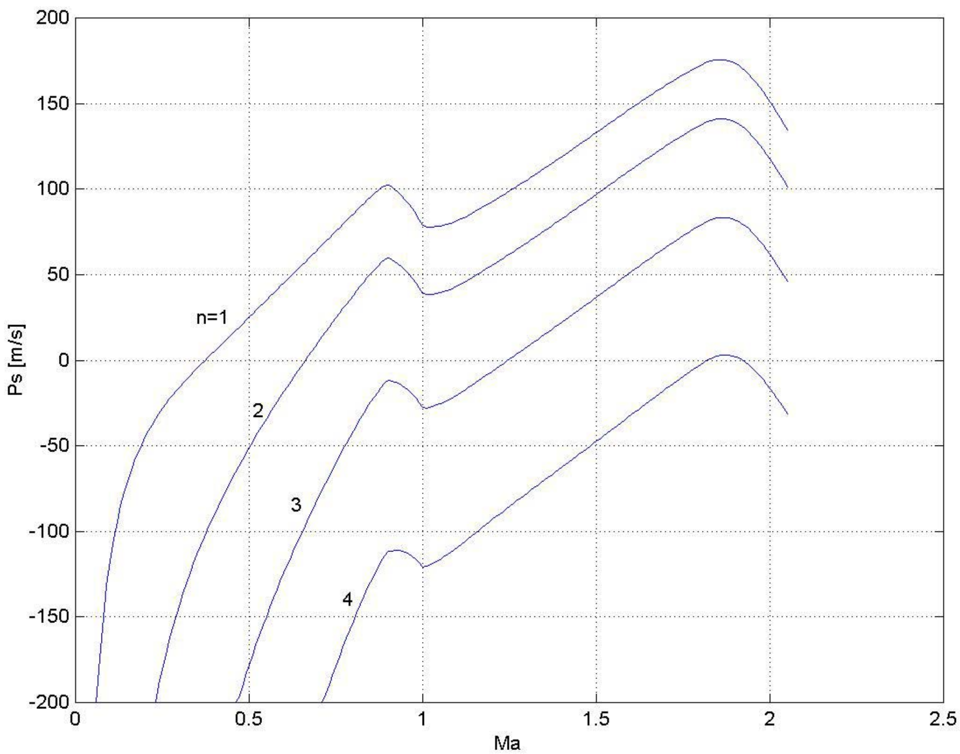
$$C_{D0} = C_{DO}(Ma) \quad \text{i} \quad K = K(Ma)$$

$$T = T(Ma,h) \;\; \text{ili} \quad VT = P_a(Ma,h)$$

$$\rho = \rho(h) \quad \text{i} \quad a = a(h)$$

Tako se na desnoj strani energetske jednadžbe pojavljuje određena funkcija o Machovu broju *Ma*, visine zrakoplova h i opterećenja *n*. Tu funkciju od te tri varijable *Ma*, *h* i *n* označit ćemo sa $P_S(Ma,h,n)$. Pretpostavimo da smo napravili program u kome su ulazne veličine

Ma, *h* i *n* a izlaz je specifičan višak snage P_S. Program za izračunavanje P_S koristi tri podprograma: prvi, za aerodinamičke funkcije $C_{D0} = C_{DO}(Ma)$ i $K = K(Ma)$, drugi za raspoloživu silu (ili snagu) i treći za svojstva zraka ovisno o visini. U programu moramo zadati i dvije konstante masu *m* ili težinu *W* i referentnu površinu *S*. Na slici 10.1 za zrakoplov koji ima karakteristike lovca (vidi primjer) nacrtana je familija krivulja $P_S(Ma)$ za razna opterećenja *n,* i za jednu visinu.



Slika 10-1. Funkcija $P_S(Ma, n, h)$, $h = 10000\,m$.

Funkcija $P_S(Ma, h, n)$ lako se računa, ali analitički se ne može riješiti ni po visini *h* ni po Machovu broju *Ma*.

10.2.2 Primjer

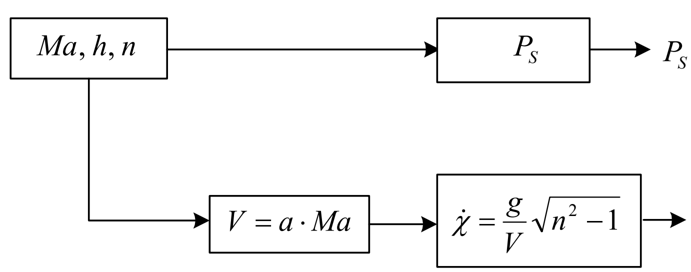
Zadane su aerodinamičke funkcije lovca $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$ u potprogramu ***Energija\otpor.m*** za referentnu površinu $S = 23{,}0$. Masa letjelice je $m = 6200\,kg$, a masa goriva $m_f = 2400\,kg$. Motor ima maksimalnu pogonsku silu koja u standardnoj atmosferi ovisi o visini i Machovu broju $T(H, Ma)$. Ta ovisnost zadana je potprogramom ***motor.m*** u istom direktoriju kao i treći potprogram ***ISO.m*** koji za zadanu visinu vraća temperaturu zraka *T*, tlak *p*, gustoću ρ i brzinu zvuka *a*. Izračunat ćemo i i nacrtati krivulje $P_S(Ma)$ za normalna opterećenja $n = 1, 2, 3, 4, 5$, a za visinu $h = 5000\, m$ Za izračunavanje krivulja $P_S(Ma)$ napravljen je program ***Ps_Ma.m***, u MATLAB-u. Pomoću tog programa nacrtane su krivulje na slici 10-1. I taj program, kao i tri podprograma, nalazi se u direktoriju Energija.

10.3 Usporedba performansi zrakoplova

10.3.1 Specifična snaga u funkciji kutne brzine

Kutna brzina horizontalnog zaokreta važna je performansa borbenih zrakoplova. Bolji je aerodinamički onaj lovac koji može, pri istom višku specifične snage, ostvariti veću kutnu brzinu u horizontalnom zaokretu. Da bismo ocijenili tu performansu lovca trebamo krivulju $P_S(\dot{\chi})$

Za poznati zrakoplov koji leti na visini *h* s Machovim brojem *Ma,* možemo izračunati funkciju specifičnog viška snage ovisno o opterećenju *n* na primjer pomoću programa $P_S(Ma, h, n)$ iz prethodnog poglavlja.

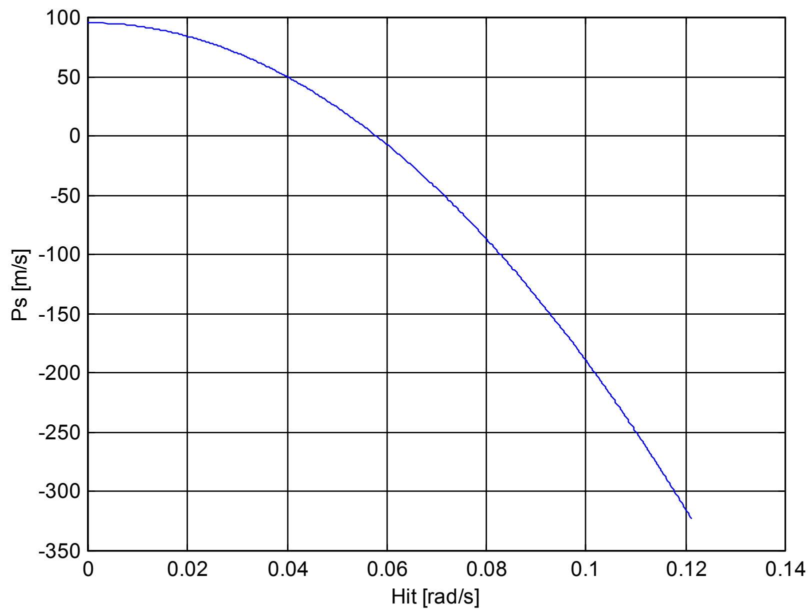


Slika 10-2. Dijagram toka za izračunavanje krivulja $P_S(\dot{\chi})$

Horizontalna kutna brzina za brzinu leta $V = Ma \cdot a(h)$ poznata je funkcija visine *h*, Machova broja *Ma* i opterećenja *n*:

$$\dot{\chi} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{Ma \cdot a(h)} = \dot{\chi}(h, Ma, n) \qquad 10.6$$

Dijagram logičnog toka prikazan je je na slici 10-2. Prema tom algoritmu može se napraviti program koji daje parametarske jednadžbe krivulja $\dot{\chi}(\mathrm{P_S})$. Parametar je *n*, ako su *Ma* i *h* zadani. Na slici 10.3 prikazana je krivulja $P_S(\dot{\chi})$ koja je izračunana za borbeni zrakoplov iz primjera u prethodnom poglavlju. Program pod imenom ***Ps_Hit.m*** nalazi se u istom direktoriju ***Energija*** jer koristi iste potprograme kao i program ***Ps_Ma.m*** **.**



Slika 10-3. Ovisnost viška specifične snage o kutnoj brzini u horizontalnom zaokretu za Machov broj $Ma = 1.2$ i visinu $h = 10000\,m$

Sa slike vidimo da pri $P_S = 0$ ovaj lovac može ostvariti kutnu brzinu

$$\dot{\chi} = 0.057\ rad/s = 3.3\ stupnja/s\,.$$

Smatra se [20] da je značajno bolji onaj zrakoplov ako pri istoj snazi ima kutnu brzinu veću za 0.035 rad/s (2 stupnja po sekundi)

10.3.2 Krivulje normalnog opterećenja za P_S=0

Za relativnu ocjenu performansi borbenih zrakoplova najviše se upotrebljava dijagram na kome su krivulje $n(Ma,h) = const$ za $P_S = 0$ koje odgovaraju ravnotežnom stanju u letu.

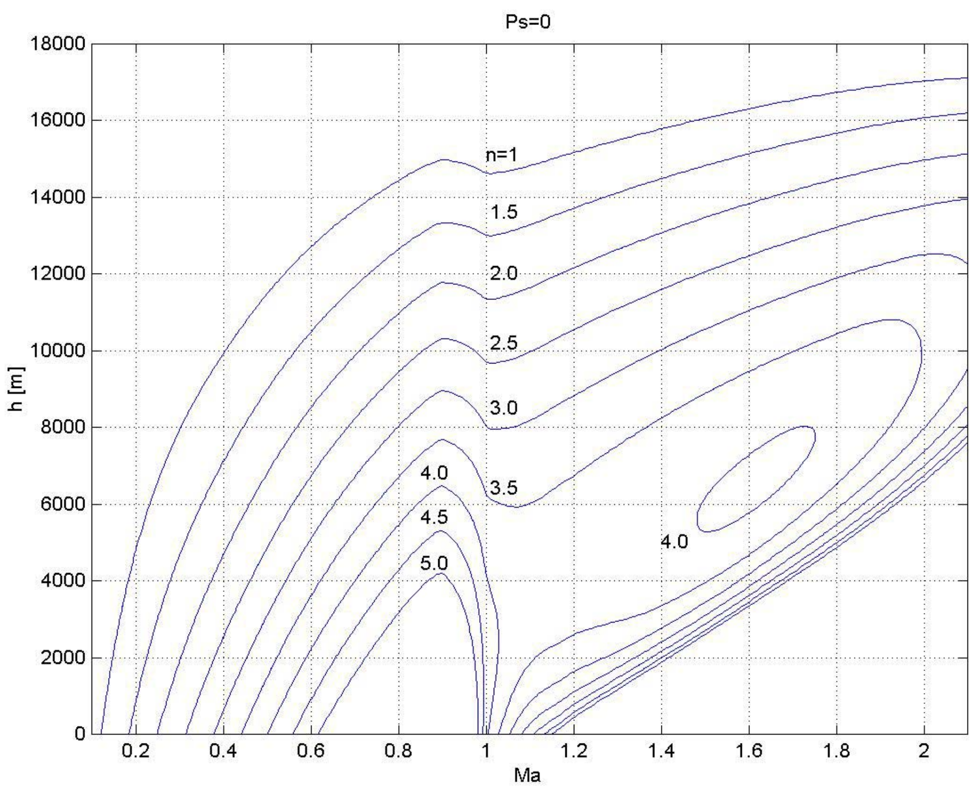
Iz jednadžbe $P_S = 0$ dobivamo

$$\frac{VT}{W} - \frac{\rho V^3 S}{2W} C_{DO}(Ma) - 2n^2 K \frac{W}{\rho V S} = 0$$

Tu jednadžbu rješavamo po normalnom opterećenju:

$$n(h, Ma) = \sqrt{\left[\frac{VT}{W} - \frac{\rho V^3 S}{2W} C_{DO}(Ma)\right] \frac{\rho VS}{2KW}} \qquad 10.7$$

U MATLAB-u postoji naredba *contour* koja nam crta u koordinatnom sustavu *Ma* na apscisi i *h* na ordinati krivulje $n(h, Ma) = const$. Pomoću te naredbe napravili smo program ***Ps_0.m*** kojim smo nacrtali krivulje na slici 10-4 za isti zrakoplov lovac kao u prethodnom poglavlju.



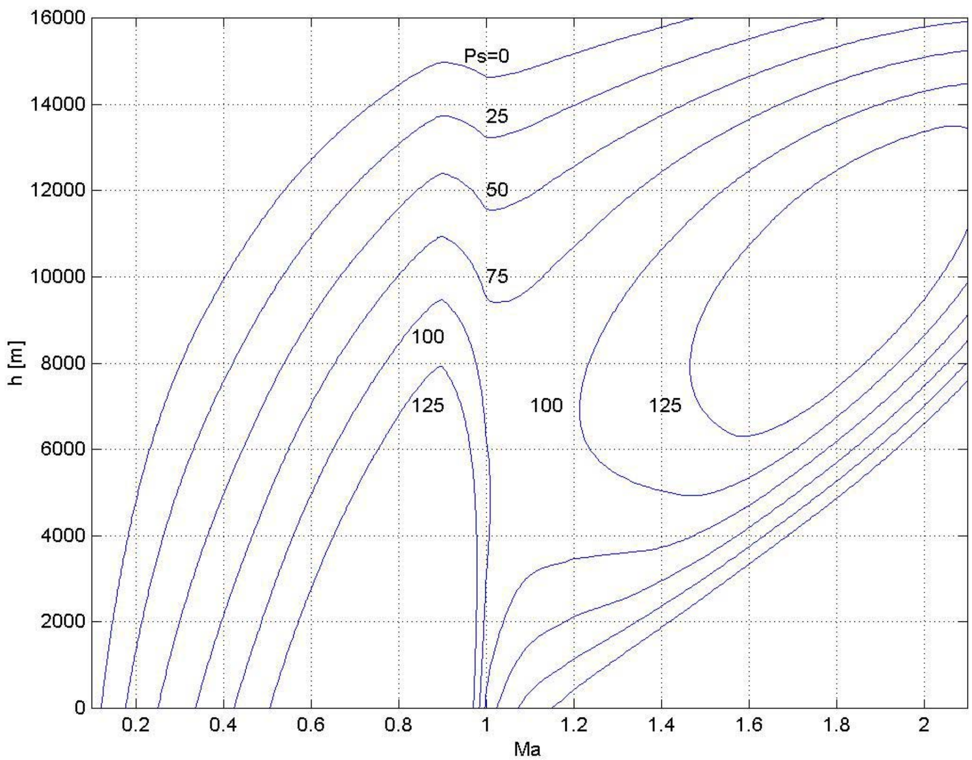
Slika 10-4. Krivulje $n(Ma, h) = const$ za $P_S = 0$

Bolji zrakoplov ima krivulju $n(Ma, h) = const$ koja obuhvaća krivulju njegova suparnika jer može s istim Machovim brojem na istoj visini razviti veće opterećenje, ili na istoj visini pri istom oterećenju može letjeti u većem intervalu Machovih brojeva.

10.4 Područje leta i optimalno penjanje

10.4.1 Krivulje *$P_s(Ma,h)$=const* za određeno opterećenje *n*

Vidjeli smo da se penjanje odvija s konstantnim opterećenjem (blisko jedinici). U koordinatnom sustavu *Ma-h* (na horizontalnoj osi je Machov broj, a na vertikalnoj osi je visina) možemo nacrtati familiju krivulja s konstantnim opterećenjem *n* (na primjer za $n = 1$), a za različito $P_S = const$.



Slika 10-5. Krivulje $P_S(Ma,h) = const$, za $n = 1$ za zrakoplov lovac.

Znači da svaka krivulja familije odgovara jednoj vrijednosti $P_S(Ma,h) = const$, a sve krivulje familije imaju isto opterećenje $n = const$:

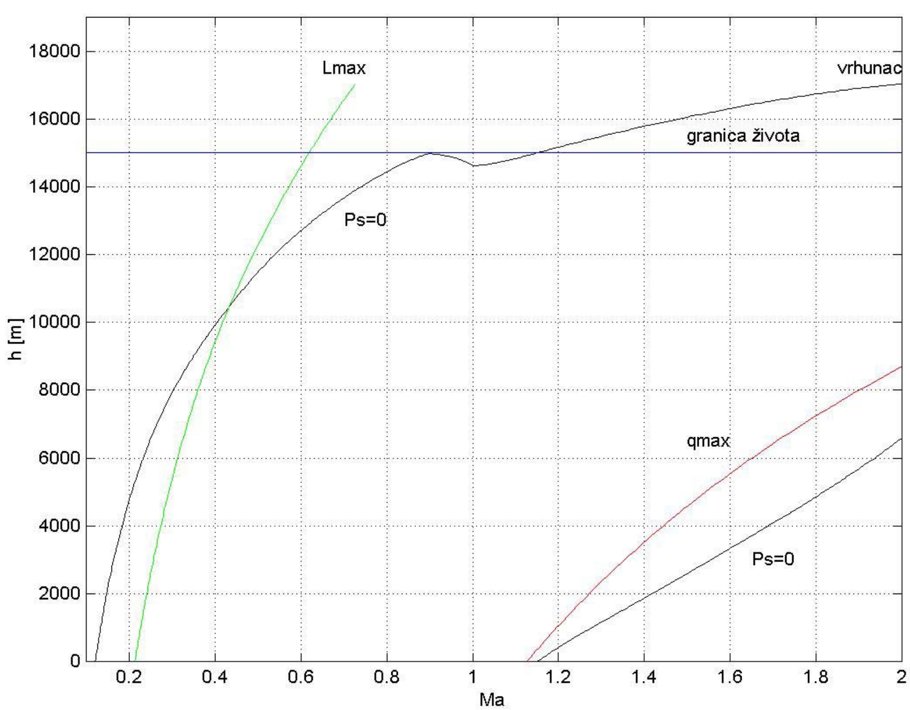
$$P_S = \frac{VT}{W} - \frac{VqS}{W} C_{D0} - n^2 K \frac{VW}{qS} = const \qquad 10.8$$

Familija krivulja za $n = 1$ posebno je važna jer je to slučaj horizontalnog leta, a upotrebljava se i za optimalnu putanju penjanja. Oblik ovog dijagrama prikazan je na slici 10-5 za lovac kao primjer iz prethodnog poglavlja. Program ***Ps_const.m*** kojim je nacrtan taj dijagram nalazi se u istom direktoriju Energija.

Ti se dijagrami ne upotrebljavaju samostalno. Njihova je uporaba objašnjena u slijedeća dva odjeljka.

10.4.2 Područje uporabe zrakoplova

U prethodnom poglavlju o performansama (odjeljak 8.1.4) vidjeli smo da s obzirom na raspoloživu snagu motora na svakoj visini u horizontalnom letu postoje minimalna i maksimalna brzina leta (ili Machov broj). Te veličine, ovisno o visini, čine ovojnice koje ograničavaju područje mogućih režima horizontalnog leta. U ovom poglavlju imamo krivulje $P_S = 0$, koje ograničavaju područje u kome je snaga motora veća ili jednaka potrebnoj snazi kad je $n = 1$. Npr u horizontalnom letu je $n = 1$, pa nam krivulja $P_S = 0$ određuje područje mogućih horizontalnih letova. Zato bi za isti zrakoplov ovojnice horizontalnog leta iz odjeljaka 8.14 bile iste s krivuljama $P_S = 0$. Na slici 10-6 prikazane su te krivulje $P_S = 0$ za jedan borbeni zrakoplov. Najviša točka te krivulje predstavlja apsolutni vrhunac leta (*absolute ceiling*).



Slika 10-6. Operativne ovojnice

Za neke zrakoplove vrhunac je vrlo velik te se postavlja pitanje preživljavanje pilota u slučaju njegova izbacivanja. Smatra se da je na visinama većim od 15 km (50000 ft) potrebna specijalna oprema koju imaju astronauti da bi čovjek mogao preživjeti. S obzirom da piloti nemaju tu opremu, oni ne mogu biti van kabine zrakoplova iznad 15 km. Ako je apsolutni ili praktični vrhunac iznad te visine, onda se ograničava visina leta do granice preživljavanja pilota izvan kabine.

Dinamički tlak q predstavlja ima neposrednu ulogu u površinskom naprezanju konstrukcije, te njegovu maksimalno dopuštenu vrijednost propisuje konstruktor, jer je to vrijednost s kojom je analizirano naprezanja konstrukcije. Tako je za borbene zrakoplove ta granica oko 100 $k\,Pa$. Na slici 10-6 ta krivulja označena je $q_{\max}$.

Na velikim visinama pojavljuje se problem ponovnog pokretanja motora ako se on ugasi, jer je gustoća zraka mala. Tu gornju granicu propisuje proizvođač motora, jer ona ovisi i o brzini leta zato što se motor lakše pokrene ako je brzina zrakoplova veća. Kako gustoća pada s visinom, tako se ta granica dinamičkog tlaka pomiče prema većim brzinama.

I tlak na ulazu usisnika može imati određeno ograničenje. Pri velikim brzinama leta i u donjim slojevima može biti tlak na ulazu usisnika prevelik.

Konačno, na velikim brzinama i aerodinamičko zagrijavanje može biti ograničenje, što ovisi o materijalu na površini onih dijelova koji su najviše izloženi aerodinamičkom zagrijavanju. Unutar svih tih krivulja nalazi se područje normalne uporabe zrakoplova.

10.4.3 Minimalno vrijeme penjanja

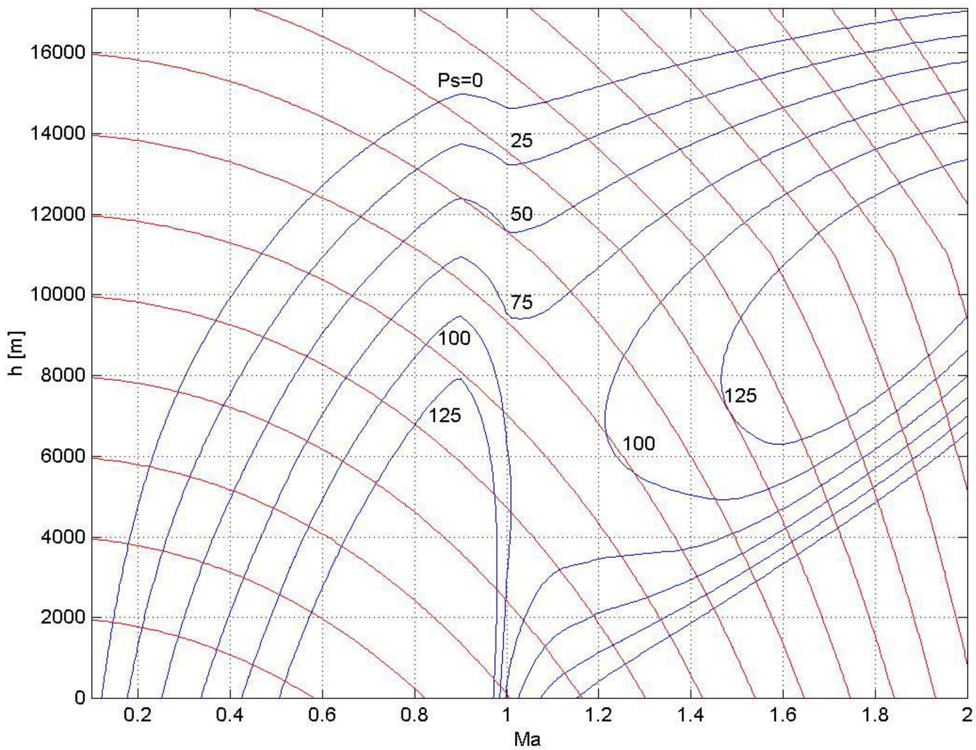
Bez ikakvih problema možemo nacrtati i krivulje $h_e = const$ u koordinatnom sustavu *Ma-h* gdje već imamo krivulje $P_S(Ma,h) = const$ (za $n = const$ kojim izvodimo penjanje). Jednadžba specifične energije h_e (ukupna energija zrakoplova svedena na jedinicu mase):

$$h_e = h + \frac{V^2}{2g} = const \qquad 10.9$$

$$h + \frac{a(h)^2}{2g} Ma^2 = h_e = const \qquad 10.10$$

Tako, kroz jednu točku (Ma,h) prolazi jedna krivulja $h_e(Ma,h) = const$ i jedna krivulja $P_S(Ma,h) = const$ (za određeno *n*). To znači da je u toj točki, na visini *h* pri Machovu broju

Ma, energetska visina $h_e = const$ i specifični višak snage $P_S = const$. Slika 10-7 nacrtana je pomoću programa ***Pshe_const.m*** koji se nalazi na disketi u direktoriju Energija.



Slika 10-7 Familija krivulja $P_S(Ma, h) = const$ i $h_e(Ma, h) = const$

za zrakoplov lovac kada je $n = 1$

Iz energetske jednadžbe

$$\frac{dh_e}{dt} = P_S$$

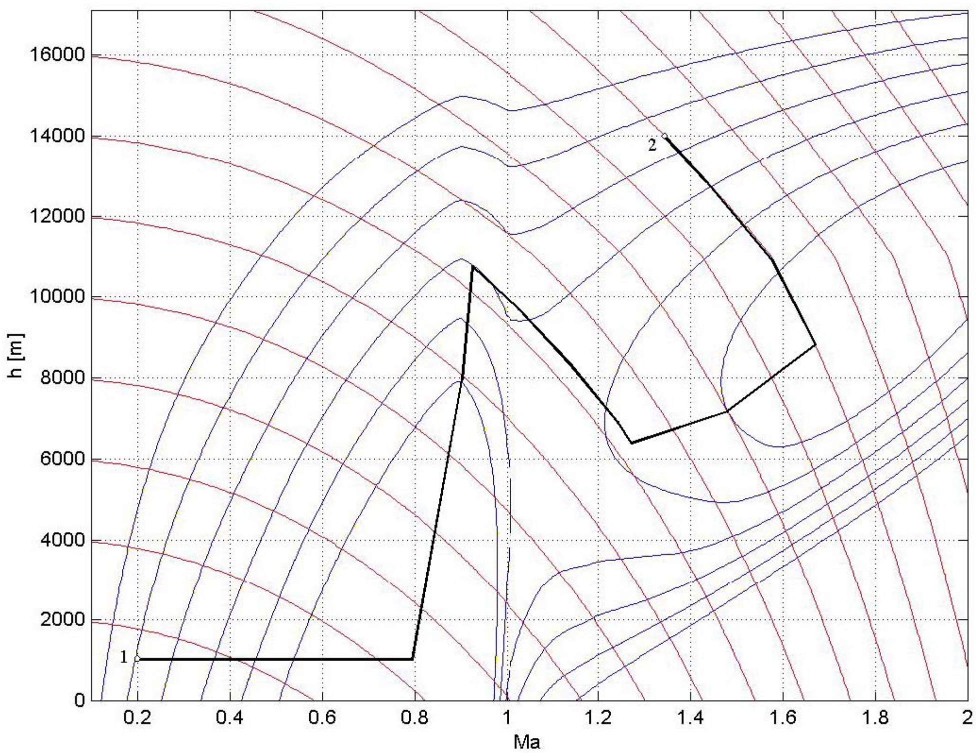
dobivamo

$$dt = \frac{dh_e}{P_S}$$

Vrijeme prelaska iz režima leta h_1, Ma_1 kome odgovara energetska visina h_{e1}, u režim leta h_2, Ma_2 kome odgovara energetska visina h_{e2}, određeno je integralom:

$$t = \int_{h_{e1}}^{h_{e2}} \frac{1}{P_S} dh_e \tag{10.11}$$

Da bismo izračunali ovaj integral, trebamo znati funkciju $P_S(h_e)$. Ta funkcija je niz točaka kroz koje predstavljaju promjenu režima leta Ma, h od početnog režima leta Ma_1, h_1 koji predstavlja točku 1 u krajnji režim leta Ma_2, h_2 koji predstavlja točku 2. Točke možemo definirati pomoću koordinata Ma, h kao na dijagramu slika 10-8 ili pomoću krivulja koje prolaze kroz tu isu točku h_e, P_S.



Slika 10-8. Prelazak iz stanja $h = 1000; Ma = 0.2$ u stanje $h = 14000; Ma = 1.35$

za minimum vremena

Da bi vrijeme bilo minimalno, treba režim leta mijenjati tako da vrijednosti funkcije $P_S(h_e)$ budu najveće moguće. Režim leta znači određeni Machov broj Ma na zadatoj visini h. Te dvije vrijednosti predstavljaju određenu točku u dijagramu *Ma-h*. Kroz tu točku prolaze dvije krivulje $h_e(Ma, h) = const$ i $P_S(Ma, h) = const$. Ta točka može biti pretstavljena krivo-linijskim koordinatama h_e P_S. Zamislimo da mijenjamo tako režim leta da točke na dijagramu sve nalaze na krivulji $h_e(Ma, h) = const$. Vrijednosti P_S od jedne do druge točke će rasti, a zatim opadati zbog oblika krivulja $P_S(Ma,h)=const$, a bit će najveća u onoj točki u kojoj se krivulje $h_e(Ma,h)=const$ i $P_S(Ma,h)=const$ tangiraju. To znači da iz točke koja predstavlja režim leta *1* treba ići u režim leta koji predstalja točka *2* kroz kočke u kojima su krivulje h_e i P_S tangentne jedna na drugu. Dok krivulje $h_e=const$ idu pravilno, krivulje $P_S=const$ za vrijednosti Machova broja u transsonici su nepravilne zbog nepravilnog toka funkcija $C_{D0}(Ma)$ i $K(Ma)$. Potrebna snaga raste u transsonici, što ima za posljedicu stvaranja zatvorene krivulje $P_S=const$. Ako prijelaz iz režima leta 1 u režim leta 2 vodi pored te zatvorene krivulje, treba režim leta mijenjati duž $h_e=const$ da bi se opet išlo kroz točke koje imaju zajedničke tangente za krivulje h_e i P_S. Opravdanje za ovakav postupak jest činjenica da kada mijenjamo režim leta po krivulji $h_e=const$, onda je $dh_e=0$, te se vrijednost integrala ne povećava.

10.4.4 Penjanja s najmanjom potrošnjom goriva

Izbor promjene režima leta u penjanju može se temeljiti i na najmanjoj potrošnji goriva. Da bi se odredila promjena režima leta u penjanju tako da je najmanja potrošnja goriva, trebamo funkciju f_S - *prirast specifične energije po jedinici goriva* (*fuel specific energy*)

$$\frac{dh_e}{-dm_f}=f_S \tag{10.12}$$

Ako zrakoplov ima mlazni motor za koji je potrošnja goriva proporcionalna pogonskoj sili, onda je

$$f_S=\frac{dh_e}{-dm_f}=\frac{P_S dt}{C_T T\,dt}=\frac{P_S}{C_T T}=f_S(Ma,h,n) \tag{10.13}$$

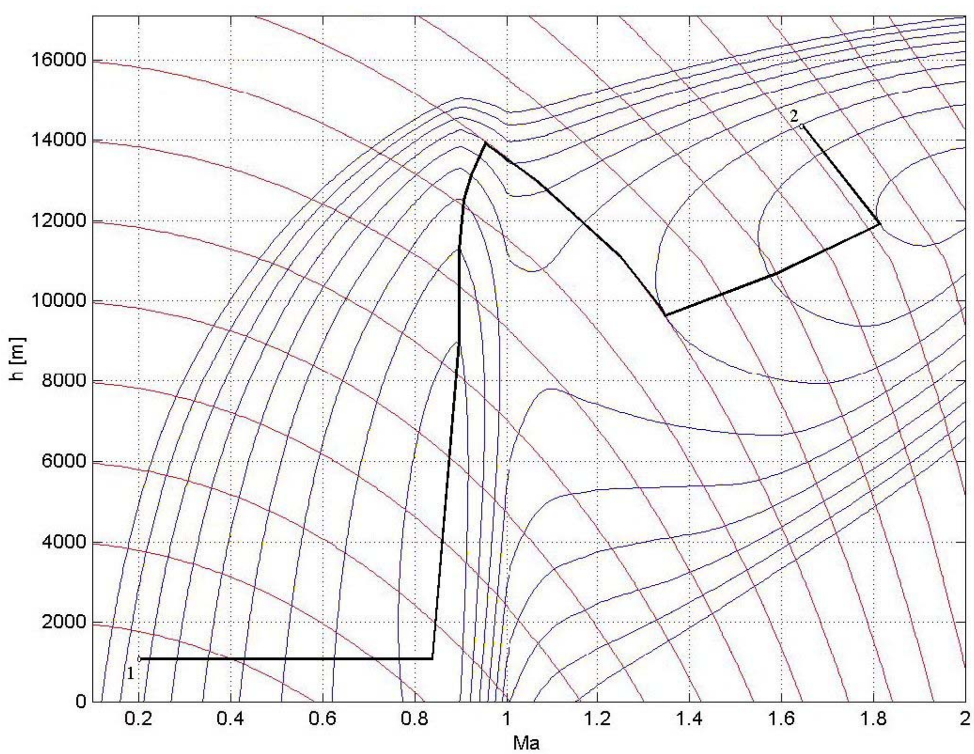
Drugim riječima prirast specifične energije po jedinici gorivi također je funkcija Machova broja, visine i normalnog opterećenja. Za zadano opterećenje *n*, na desnoj strani je funkcije Machova broja *Ma* i visine leta *h,* pa je za određeno opterećenje pri penjanju:

$$f_S=f_S(Ma,h) \tag{10.14}$$

Na slici 10-9 prikazane su funkcije $f_S(Ma,h)=const$ za normalno opterećenje $n=1$. Iz definicije za funkciju f_S dobiva se da je količina goriva od režima leta 1 do režima leta 2:

$$-\Delta m_f=m_{f1}-m_{f2}=\int_1^2\frac{1}{f_S}dh_e \tag{10.15}$$

Da bi se iz režima leta 1 prešli u režim leta 2 mi prolazi se kroz razne režime leta. Svakom režimu leta odgovara jedna točka, jedna visina h i jedna brzina *Ma,* ili jedna specifična ukupna energija h_e i jedan *prirast specifične energije po jedinici goriva* f_S. Tako pri prijelazu iz režima leta 1 u režim leta 2 ti parovi vrijednosti h_e, f_S predstavljaju točke puta duž kojega treba izračunati ovaj integral. Da bi na tom putu bila najmanja potrošnja goriva treba režime leta mijenja duž točaka u kojima je f_S u maksimumu. Od svih točaka na krivulji $h_e = const$ bit će f_S u maksimumu u točkama u kojima se krivulje $f_S = f_S(Ma, h)$ i $h_e(Ma, h) = const$ tangiraju. Drugim riječima, od svih točaka s istom ukupnom energijom h_e u tim točkama je funkcija f_S u maksimumu. Te točke vidimo na slici 10-9.



Slika 10-9. Prijelaz iz energetskog stanja 1 u stanje 2 s najmanjom količinom goriva