11 MODEL LETA SA 6 STUPNJEVA SLOBODE GIBANJA

11.1 Opće odrednice

U ovoj knjizi razmatraju se problemi upravljivosti, stabilnosti, polijetanje i slijetanje a posebno dinamičko ponašanje zrakoplova pri upravljanju u odnosu na Zemlju. Kako se Zemlja okreće kutnom brzinom $\vec{\Omega}_E$, gibanje zrakoplova u odnosu na Zemlju jest relativno gibanje, okretanje Zemlje je prijenosno gibanje, a gibanje letjelice u svemiru je apsolutno gibanje. Pri izučavanju relativnoga gibanja osim realnih sila treba dodati i sile tromosti. U ovom slučaju to su dvije sile tromosti: centrifugalna sila zbog rotacije Zemlje i Coriolisova sila. Time smo uzeli u obzir bitnu činjenicu da je let u odnosu na Zemlju relativno gibanje.

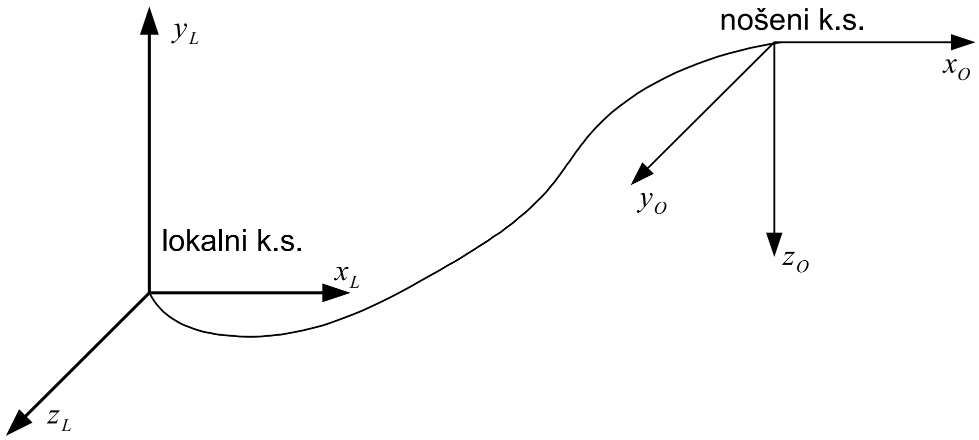
U ovom knjizi ograničili smo se na krutu letjelicu. Zrakoplov kao kruto tijelo ima šest stupnjeva slobode te zato ovaj model nazivamo skraćeno 6DOF od engleskog punog naziva *six degrees of freedom*. Čine ga četiri matrične jednadžbe:

- derivacija vektora položaja središta mase letjelice,
- derivacija brzine leta središta mase letjelice,
- derivacija kinetičkog momenta letjelice za središte mase,
- derivacija stava letjelice.

Budući da ne izučavamo probleme navigacije, zanemarit ćemo Zemljanu zakrivljenost. Zanemarivanjem zakrivljenosti Zemlje, nošeni koordinatni sustav ostaje sve vrijeme leta paralelan sam sebi, tj on ima samo translatorno gibanje u odnosu na zemlju. Kako lokalni koordinatni sustav miruje u odnosu na zemlju, u proučavanju relativnog gibanja ta dva koordinatna sustava, lokalni i nošeni, nemaju kutnih brzina, njihov međusobni kutni položaj je uvijek isti. Da bismo pojednostavili izvođenja, obično ih biramo tako da su im osi paralelne kao na slici 11-1. Za tako izabrane koordinatne sustave je matrica transformacije iz jednog u drugi

$$\mathbf{L}_{OL} = \mathbf{L}_X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

jer nošeni dobivamo rotacijom lokalnog oko x osi za kut $\pi/2$.



Slika 11-1Položaj nošenog u odnosu na lokalni koordinatni sustav

11.1.1 Derivacija vektora položaja

Vektor položaja $\vec{r}$ počinje u ishodištu lokalnog koordinatnog sustava (vezan za Zemlju) i završava se u središtu mase letjelice. Njegove projekcije na osi lokalnog koordinatnog sustava su:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \qquad 11.1$$

Brzinu leta definirali smo kao brzinu u odnosu na Zemlju, a to znači da su komponente brzine leta u lokalnom koordinatnom sustavu derivacije komponenata vektora položaja.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_K^L \\ v_K^L \\ w_K^L \end{bmatrix} \qquad 11.2$$

To pišemo matrično ovako:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}_K^L \qquad 11.3$$

To je vektorska jednadžba čijom integracijom dobivamo koordinate središta mase letjelice. Za tu integraciju potrebne su komponente brzine leta u lokalnom koordinatnom sustavu. Kako komponente brzine leta $\mathbf{V}_K = \begin{bmatrix} u_K & v_K & w_K \end{bmatrix}^T$ metodom 6DOF dobivamo duž osi tromosti letjelice, onda ovu vektorsku jednadžbu koristimo u obliku

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{L}_{LF} \mathbf{V}_K \qquad 11.4$$

ili

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{LF} \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

11.1.2 Derivacija brzine leta

Kao što smo to rekli u poglavlju 6.1.1 po definiciji su komponente relativnog ubrzanja jednake derivacijama komponenata relativne brzine u prenosnom koordinantnom sustavu. To znači da je relativno ubrzanje

$$\mathbf{a}_r^L = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{V}_K^L\right)$$

S obzirom na to da su komponente brzine $\mathbf{V}_K = \begin{bmatrix} u_K & v_K & w_K \end{bmatrix}^T$ poznate duž glavnih osi tromosti letjelice, a taj koordinatni sustav ima kutnu brzinu $\vec{\Omega}$ u odnosu na zemlju, čije su komponente duž tih istih glavnih osi tromosti $\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$, bit će prema odjeljku 1.1.3 komponente relativnog ubrzanja duž glavnih osi tromosti

$$\mathbf{a}_r = \widetilde{\Omega}\,\mathbf{V}_K + \dot{\mathbf{V}}_K \tag{11.6}$$

Za vrijeme leta zrakoplov mijenja masu, pa se a priori na njega ne može primijeniti Newtonov zakon, prema kojemu je produkt mase zrakoplova s relativnim ubrzanjem jednak zbroju vanjskih sila i sila tromosti. Zrakoplov se mora promatrati kao materijalni sustav promjenljive mase. Taj sustav je definiran vanjskom površinom zrakoplova na kojoj se nalaze ulazne površine S_u kroz koje ulazi zrak i izlazne površine S_i kroz koje istječu plinovi, produkti izgaranja. Na takav sustav primjenjuje se načelo očvršćivanja (odjeljak 6.3.5) po kojemu umjesto zrakoplova s promjenljivom masom, promatramo drugi fiktivni zrakoplov konstantne mase m^S koja je jednaka masi zrakoplova u promatranom trenutku $m(t)$. To znači da je u svakom trenutku drugi očvrsnuti sustav. Na taj očvrsnuti sustav u kontrolnoj površini možemo primijeniti Newtonov zakon klasične mehanike za relativno gibanje 6.24:

$$\widetilde{\Omega}\,\mathbf{V_K} + \dot{\mathbf{V}}_\mathbf{K} = \frac{\mathbf{R}}{m} + \mathbf{g} + \left(-\,\mathbf{a}_{CK}\right). \tag{11.7}$$

Rezultantu **R** čine:

- aerodinamička sila $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ čije su komponente duž glavnih osi tromosti zrakoplova,
- pogonska sila $\begin{bmatrix} F_X & F_Y & F_Z \end{bmatrix}^T$ koja je objašnjena detaljno u odjeljku 6.4 za slučaj mlaznog motora i 6.5 za slučaj elisnog pogona,

- vektor $\vec{g}$ je zbroj ubrzanja privlačne sile Zemlje i prijenosnog centrifugalnog ubrzanja uslijed rotacije Zemlje. I ako on ovisi o geografskoj širini i visini, ovdje usvajamo da je vektor $\vec{g}$ konstantan, intenziteta 9.80616, po pravcu vertikalan, a po smjeru prema dolje.

U gornjoj matričnoj jednadžbi zanemarujemo Coriolisuvu silu tromosti pa matrična jednadža gibanje središta mase zrakoplova ima oblik:

$$m\left(\tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{V}_K + \dot{\mathbf{V}}_K\right) = \begin{bmatrix} X^A \\ Y^A \\ Z^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_Z \end{bmatrix} + m\,\mathbf{L}_{FO}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \tag{11.8}$$

Komponente aerodinamičke sile poznate su nam duž glavnih osi tromosti zrakoplova obično u obliku:

$$\begin{aligned} X^A &= \frac{\rho V^2}{2} S C_X^A\left(Ma, \alpha, \beta^2\right) \\ Y^A &= \frac{\rho V^2}{2} S C_Y^A\left(Ma, \beta, p, r, \delta_\ell \delta_n\right) \\ Z^A &= \frac{\rho V^2}{2} S C_Z^A\left(Ma, \alpha, \dot{\alpha}, q, \delta_m\right) \end{aligned} \tag{11.9}$$

Za transportne zrakoplove napadni kut i kut klizanja nisu veliki pa možemo aerodinamičke koeficijente linearizirati po ovim varijablama.

$$\begin{aligned} C_X &= C_{X0} + C_{X\alpha}\alpha + C_{X\beta^2}\beta^2 \\ C_Y &= C_{Y\beta}\beta + C_{Yp}p^* + C_{Yr}r^* + C_{Y\delta_n}\delta_n \\ C_Z &= C_{Z0} + C_{Z\alpha}\alpha + C_{Z\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^* + C_{Zq}q^* + C_{Z\delta_m}\delta_m \end{aligned} \tag{11.10}$$

11.1.3 Derivacija kinetičkog momenta

Kinetički moment gibanja $\vec{\mathrm{H}}$ kao i aerodinamički i pogonski moment uzimamo za središte mase. Komponente kinetičkog momenta duž osi koordinatnog sustava letjelice jednake su produktu tenzora tromosti $\mathbf{I}$ i vektora kutne brzine letjelice $\mathbf{\Omega}$.

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}$$

Budući da smo usvojili glavne osi tromosti, tenzor tromosti ima samo članove na dijagonali. To su momenti tromosti za te osi pa su komponente kinetičkog momenta za glavne osi tromosti

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} I_x(t) & 0 & 0 \\ 0 & I_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & I_z(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x(t)p \\ I_y(t)q \\ I_z(t)r \end{bmatrix}$$

Zbog promjenljivosti momenata tromosti s vremenom, jer zrakoplov nije tijelo konstantne mase, na derivaciju toga momenta ne može se primijeniti teorem o derivaciji kinetičkog momenta iz klasične mehanike. I ovdje se mora primijeniti načelo očvršćivanja (prema 6.3.5), prema kojemu određujemo derivaciju kinetičkog momenta letjelice koja ima u promatranom trenutku isti tenzor tromosti ali konstantan $\mathbf{I}^S = \mathbf{I}(t)$. Na tu očvrsnutu letjelicu primjenjujemo zakon o derivaciji kinetičkog momenta iz klasične mehanike:

$$\frac{d\vec{H}^s}{dt} = \vec{M} + \vec{M}^F$$

Budući da su komponente kinetičkog momenta poznate duž glavnih osi tromosti $\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$, koje imaju kutnu brzinu kao i letjelica $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$, komponente derivacije kinetičkog momenta duž istih osi izračunavamo prema odjelu 1.1.3 po jednadžbi

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{H}^S + \dot{\mathbf{H}}^S .$$

S obzirom na to što se radi o očvrsnutoj letjelici, prilikom deriviranja komponenata kinetičkog momenta $\dot{\mathbf{H}}^S$ tenzor tromosti trebamo smatrati konstantnim:

$$\dot{\mathbf{H}}^S = \begin{bmatrix} \dot{H}_X^S \\ \dot{H}_Y^S \\ \dot{H}_Z^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_X(t)\dot{p} \\ I_Y(t)\dot{q} \\ I_Z(t)\dot{r} \end{bmatrix},$$

iako su momenti tromosti funkcije vremena. Izjednačavanjem derivacije kinetičkog momenta i zbroja momenata, duž osi tromosti bit će

$$\dot{\mathbf{H}}^S + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{H} = \mathbf{M}^A + \mathbf{M}^F . \qquad 11.11$$

Komponente aerodinamičkog momenta za središte mase $\mathbf{M}^A$ duž glavnih osi tromosti zrakoplova dane su obično jednadžbama:

$$\begin{aligned} L^A &= \frac{\rho V^2}{2} SbC_\ell\left(Ma,\beta,p,r,\delta_\ell,\delta_n\right) \\ M^A &= \frac{\rho V^2}{2} S\bar{c}C_m\left(Ma,\alpha,\dot{\alpha},q,\delta_m\right) \\ N^A &= \frac{\rho V^2}{2} SbC_n\left(Ma,\beta,p,r,\delta_\ell,\delta_n\right). \end{aligned} \qquad 11.12$$

Za transportne su zrakoplove kutovi α i β mali, pa je moguće aerodinamičke koeficijente momenata linearizirati po ovim varijablama. Tada oni imaju oblik:

$$\begin{aligned} C_\ell &= C_{\ell\beta}\beta + C_{\ell p}p^* + C_{\ell r}r^* + C_{\ell\delta_\ell}\delta_\ell + C_{\ell\delta_n}\delta_n \\ C_m &= C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\dot\alpha}\dot\alpha^* + C_{mq}q^* + C_{m\delta_m}\delta_m \\ C_n &= C_{n\beta}\beta + C_{nr}r^* + C_{np}p^* + C_{n\delta_\ell}\delta_\ell + C_{n\delta_n}\delta_n \end{aligned} \qquad 11.13$$

Pogonski moment za središte mase $\vec{M}^F$ ima komponente duž glavnih osi tromosti

$$\mathbf{M}^F = \begin{bmatrix} L^F & M^F & N^F \end{bmatrix}^T, \qquad 11.14$$

Njih smo detaljno objasnili u odjeljku 6.4 za slučaj mlaznog motora i u odjeljku 6.5 za slučaj elisnog pogona.

11.1.4 Derivacija stava ili parametara

U prvoj matričnoj jednadžbi treba nam matrica transformacije $\mathbf{L}_{OF}$. Da bismo odredili tu matricu transformacije, trebaju nam ili

- stav zrakoplova $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \phi & \vartheta & \psi \end{bmatrix}^T$ ili
- Eulerovi parametri $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}^T$.

Ako se odlučimo za stav **s**, onda je

$$\mathbf{L}_{FO} = \mathbf{L}_X(\phi)\cdot\mathbf{L}_Y(\vartheta)\cdot\mathbf{L}_Z(\psi), \qquad 11.15$$

a kutove dobit ćemo iz kutne brzine letjelice $\mathbf{\Omega}$. U poglavlju 1.3.3, izveli smo jednadžbu koja daje derivaciju stava kada znamo kutnu brzinu letjelice:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{\Omega},$$

gdje je $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \phi & \vartheta & \psi \end{bmatrix}^T$ i

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad 11.16$$

ili u razvijenom obliku

$$\begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\, tg\theta & \cos\phi\, tg\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \qquad 11.17$$

Ukoliko se odlučimo raditi s Eulerovim parametrima **e** onda na mjesto matrične diferencijalne jednadžba $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}(\phi,\vartheta)^{-1}\cdot\boldsymbol{\Omega}$, imamo matričnu diferencijalnu jednadžbu parametara

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{G}^T\mathbf{\Omega} \qquad 11.18$$

ili u razvijenom obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \qquad 11.19$$

U tom slučaju matrica transformacije, određena je jednadžbom

$$\mathbf{L}_{OF} = 2\begin{bmatrix} e_1^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_3 e_1 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_2^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_3 e_1 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_3^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad 11.20$$

11.2 Model 6DOF u simulatorima leta

Okosnicu modela čine četiri matrične jednadžbe: derivacija vektor položaja (11.4), derivacija vektora brzine leta (11.8), derivacija vektor kinematičkog momenta (11.11) i derivacija stava ili derivacija Eulerovih parametara (11.18).

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{L}_{LF}\mathbf{V}_K$$

$$m\left(\widetilde{\Omega}\,\mathbf{V}_K + \dot{\mathbf{V}}_K\right) = \mathbf{R}^{\mathbf{A}} + \mathbf{F} + m\,\mathbf{L}_{FO}\mathbf{g}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^S + \widetilde{\Omega}\,\mathbf{H} = \mathbf{M}^A + \mathbf{M}^F$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{\Omega}, \quad \text{ili} \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{G}^T\mathbf{\Omega}.$$

U tim jednadžbama ima 12 nepoznanice:

$$x \quad y \quad z \quad u_K \quad v_K \quad w_K \quad p \quad q \quad r \quad \phi \quad \theta \quad \psi$$

Međutim, u tim jednadžbama imamo još promjenljivih veličina, eksplicitno i implicitno. Eksplicitno to su masa zrakoplova i tenzor tromosti, a implicitno to su u aerodinamičkim silama i momentima: aerodinamička brzina, napadni kut i kut klizanja, ako i karakteristike zraka gustoća i brzina zvuka koja je potrebna radi određivanja Machovog broja.

Masa zrakoplova je zbroj mase letjelice, tereta i goriva. Tijekom leta prve dvije su konstantne i označavamo ih sa m_L, a masa goriva opada ovisno o potrošnji goriva. Potrošnja goriva označava se sa FC predstavlja masu gorivu koja se troši u jedinici vremena Ona se može izraziti specifičnom potrošnjom C_P, koja predstavlja masenu potrošnju goriva u jedinici vremena po jedinici snage motora, ili C_T koja predstavlja masenu potrošnju u jedinici vremena po jedinici sile motora. Ukupna masa zrakoplova je zbroj $m(t) = m_L + m_G(t)$. Deriviranjem te jednadžbe je $\dot{m} = \dot{m}_G$, pa je

$$\frac{dm}{dt} = FC = \begin{cases} C_P \cdot P_{mot} \\ C_P \cdot P_{mot} \end{cases} \qquad 11.21$$

S obzirom da je i masa zrakoplova određena diferencijalnom jednadžbom imamo trinaest varijabla koje su određene diferencijalnim jednadžbama:

$$x \quad y \quad z \quad u_K \quad v_k \quad w_K \quad p \quad q \quad r \quad \phi \quad \vartheta \quad \psi \quad m\,. \qquad 11.22$$

One čine jedan vektor koji nazivamo *vektor stanja* letjelice.

Promjena tenzora tromosti nastaje zbog promjene mase i kao posljedica pomjeranja središta mase zbog potrošnje goriva. Zato je jedan od načni određivanja tenzora tromosti napraviti funkciju

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(m_G) \qquad 11.23$$

Kada konstrukcijska rješenja osiguravaju male promjene središta mase zbog potrošnje goriva, može se taj utjecaj zanemariti. Onda je utjecaj promjene mase na tenzor tromosi linearan, pa približna jednadžba promjene tenzora tromosti može biti:

$$\mathbf{I}(t) = \frac{m(t)}{m_0}\mathbf{I}_0\,. \qquad 11.24$$

Pored varijabla vektora stanja, promjenljive mase i tenzora tromosti u jednadžbama imamo još varijabla, koje su neophodne za određivanje aerodinamičkih sila i momenata: napadni kut i njegova derivacija po vremenu, kut klizanja. gustoća zraka, brzina zvuka koja nam je potrebna za Machov broj i aerodinamička brzina.

Da bi odredili napadni kut i kut klizanja prema jednadžbama:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ \tan\alpha &= \frac{w}{u} \\ \sin\beta &= \frac{v}{V} \end{aligned} \qquad 11.25$$

potrebne su nam sve komponente aerodinamičke brzine. U sustavu diferencijalnih jednadžbi, tj. u vektoru stanja, nema komponenata aerodinamičke brzine već samo komponenata brzine leta. Aerodinamičku brzinu određujemo iz jednadžbe $\vec{V} = \vec{V}_K - \vec{V}_W$. Komponente vjetra poznate su u lokalnom odnosno u nošenom koordinatnom sustavu. Projiciranjem ove jednadžbe na koordinatni sustav letjelice dobivamo tražene komponente aerodinamičke brzine:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} u_W^O \\ v_W^O \\ w_W^O \end{bmatrix} \qquad 11.26$$

U projekcijama aerodinamičke sile i momenta pojavljuje se i derivacija napadnog kuta. Određujemo je deriviranjem jednadžbe $tan\,\alpha = w/u$. Tako dobivamo

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{w}u - w\dot{u}}{u^2 + w^2} \qquad 11.27$$

Derivacije aerodinamičke brzine i njenih komponenata dobivamo deriviranjem matrične jednadžbe koja definira komponente aerodinamičke brzine:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \\ \dot{w}_k \end{bmatrix} + \widetilde{\mathbf{\Omega}}\,\mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} u_W^O \\ v_W^O \\ w_W^O \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} \dot{u}_W^O \\ \dot{v}_W^O \\ \dot{w}_W^O \end{bmatrix} \qquad 11.28$$

Derivacije komponenata brzine leta su poznate, a derivacije vjetra trebaju biti zadane (udari vjetra). Ako vjetar nije funkcija vremena, drugi se član na desnoj strani jednadžbe poništava.

Za određivanje gustoće zraka i brzine zvuka u zraku najčešće koristimo podatke o standardnoj atmosferi. Za taj slučaj ove jednadžbe dane su u prilogu B.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(y) \\ a &= a(y) \end{aligned} \qquad 11.29$$

Ukoliko želimo simulirati let u nekoj drugoj atmosferi onda se koristimo mjerenjima temperature, tlaka i vlažnosti zraka ovisno o visini (sondaža atmosfere, vidi prilog B), a zatim na temelju tih podatak određujemo promjenu gustoće i brzine zvuka ovisno o visini.

Sad smo u mogućnosti napisati cjelokupan razvijen sustav jednadžba koji čini model 6DOF

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -\dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{OF} \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix} \qquad 11.30$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_K \\ \dot{v}_K \\ \dot{w}_K \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} X^A \\ Y^A \\ Z^A \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_Z \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \qquad 11.31$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}I_X(t) \\ \dot{q}I_Y(t) \\ \dot{r}I_Z(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} pI_X(t) \\ qI_Y(t) \\ rI_Z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L^A \\ M^A \\ N^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} \tag{11.32}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sin\,\phi tg\theta & cos\,\phi tg\theta \\ 0 & cos\,\phi & -sin\,\phi \\ 0 & sin\,\phi / cos\,\theta & cos\,\phi / cos\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{11.33}$$

$$\frac{dm}{dt} = FC = \begin{cases} C_P \cdot P_{mot} \\ C_P \cdot P_{mot} \end{cases} \tag{11.34}$$

Matricu transformacije $\mathbf{L}_{FO}$ možemo odrediti ili pomoću de Sparreovih kutova tada ima oblik

$$\mathbf{L}_{FO} = \mathbf{L}_X(\phi) \cdot \mathbf{L}_Y(\vartheta) \cdot \mathbf{L}_Z(\psi) \tag{11.35}$$

U ovom slučaju vektor stanja ima trinaest komponenti. Te su veličine zavisne varijable, a vrijeme je nezavisna varijabla.

Ako umjesto kutova de Sparre koristimo Eulerove parametre. U tom slučaju namjesto matrične diferencijalne jednadžba $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}(\phi, \vartheta)^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega}$, tj. na mjesto tri diferencijalne jednadžbe 11.32, treba uzeti matričnu diferencijalnu jednadžbu Eulerovih parametara $\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \mathbf{G}^T \mathbf{\Omega}$, a to znači na mjesto tri diferencijalne jednadžbe 11.32 imamo četiri diferencijalne jednadžbe parametara

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \tag{11.36}$$

a matrica transformacije $\mathbf{L}_{OF}$ ima oblik:

$$\mathbf{L}_{OF} = 2 \begin{bmatrix} e_1^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_3 e_1 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_2^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_3 e_1 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_3^2 + e_0^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{11.37}$$

Vektor stanja ima četrnaest komponenta

$$x \quad z \quad y \quad u_K \quad v_K \quad w_K \quad p \quad q \quad r \quad e_0 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad m$$

Pored tih varijabli koje čine vektor stanja, a koje su određene diferencijalnim jednadžbama imamo varijable koje su određene algebarskim jednadžbama. To su:

- komponente aerodinamičke brzine:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} u_W^O \\ v_W^O \\ w_W^O \end{bmatrix} \tag{11.38}$$

- derivacije komponenata aerodinamičke brzine:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \\ \dot{w}_k \end{bmatrix} + \widetilde{\mathbf{\Omega}}\,\mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} u_W^O \\ v_W^O \\ w_W^O \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} \dot{u}_W^O \\ \dot{v}_W^O \\ \dot{w}_W^O \end{bmatrix} \tag{11.39}$$

- komponente vjetra ovisne o visini

$$\begin{aligned} u_W^O &= u_W^O(h) \\ v_W^O &= v_W^O(h) \end{aligned} \tag{11.40}$$

- napadni kut α i njegovu derivaciju po vremenu $\dot{\alpha}$, kao i kut klizanja β

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ \tan\alpha &= \frac{w}{u} \\ \sin\beta &= \frac{v}{V} \end{aligned} \tag{11.41}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{w}u - w\dot{u}}{u^2 + w^2} \tag{11.42}$$

- tenzor tromosti

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(m). \tag{11.43}$$

- ovisnost pogonske sile T i specifične potrošnje C_T od brzine leta, stanja okolnog zraka i otklona δ_T

$$\begin{aligned} T &= T(V, T, \rho, \delta_T) \\ C_T &= C_T(V, T, \rho, \delta_T) \end{aligned} \tag{11.44}$$

- ovisnost karakteristika zraka temperature T i gustoće ρ o položaju zrakoplova

$$\begin{aligned} T &= T(h) \\ \rho &= \rho(h) \end{aligned} \tag{11.45}$$

Ovaj model je važan za projektiranje i ispitivanje sustava upravljanja letjelicom. Vrlo često se dijelovi tog matematičkog modela zamjenjuju realnim sklopovima, što omogućuje da se ispituju ti sklopovi. Te kombinacije realnog i matematičkog dijela letjelice u engleskoj se literaturi sreću pod imenom HIL (*hardware in the loop).*

11.3 Pojednostavljeni model 6DOF u trenažerima

Simulatore treba razlikovati od trenažera. Za trenažere leta upotrebljava se obično jednostavniji model u kome je letjelica uvijek kruto tijelo a vjetar je konstantan i u prostoru i vremenu. Ta druga pretpostavka da je vjetar konstantan omogućuje da se gibanje središta mase promatra u odnosu na relativni koordinatni sustav vezan za zrak (tzv. Didionov princip). Gibanje zraka je prijenosno gibanje, a gibanje letjelice u odnosu na zrak je relativno gibanje. Koordinatni sustav vezan za zrak giba se u odnosu na Zemlju konstantom brzinom vjetra te je on inercijski koordinatni sustav. Jednadžbe relativnog gibanja iste su kao one koje smo pisali u odnosu na Zemlju, jer je prijenosno ubrzanje jednako nuli. U prvoj jednadžbi trebamo dodati prijenosnu brzinu (brzina vjetra) a u drugoj jednadžbi, brzina leta postaje aerodinamička brzina:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -\dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{OF} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{WX} \\ V_{WY} \\ V_{WZ} \end{bmatrix} \tag{11.46}$$

Međutim, druga matrična jednadžba daje neposredno aerodinamičku brzinu:

$$m\left(\widetilde{\mathbf{\Omega}}\,\mathbf{V} + \dot{\mathbf{V}}\right) = \begin{bmatrix} X^A \\ Y^A \\ Z^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_Z \end{bmatrix} + m\,\mathbf{L}_{FO} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \tag{11.47}$$

Treća i četvrta matrične jednadžbe iste su kao jednadžbe 11.21 i 11.22, a isto je i određivanje napadnog kuta prema jednadžbama 11.34, kao i derivacije napadnog kuta po vremenu prema jednadžbi 11.36. Ovaj sustav jednadžbi koristi se u trenažerima leta. Ne zaboravimo da ovaj model možemo primijeniti samo za slučaj konstantnog vjetra. To znači da on ne može pokazati utjecaj "udara vjetra". Vektor položaja $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ određuje točku iz koje pilot promatra sliku, a stav letjelice $\begin{bmatrix} \phi & \vartheta & \psi \end{bmatrix}^T$ određuje pravac promatranja i rotaciju slike oko osi promatranja. Na temelju tih šest veličina izrađuje se slika koju vidi pilot na ekranu trenažera.