12 LINEARIZACIJA 6DOF MODELA

12.1 Princip linearizacije

12.1.1 Jednadžbe stvarnog gibanja

U sedmom poglavlju promatrali smo ravnotežna stanja u letu koja su bila okarakterizirana momentom za središte mase jednakim nuli. To ravnotežno stanje odgovaralo je određenim otklonima upravljačkih površina. Svaki otklon upravljačkih površina ima svoje ravnotežno stanje. U ovom poglavlju promatrat ćemo prijelaz iz jednoga ravnotežnog stanja u drugo. Pretpostavljamo da je bilo ravnotežno stanje za određene otklone upravljačkih površina. U tom ravnotećnom stanju promijenili smo otklone upravljačkih površina i zrakoplov treba prijeći u novi ravnotežni položaj. Taj prijelaz predstavlja problem *dinamičke stabilnosti* zrakoplova.

Za razmatranje dinamičke stabilnosti poći ćemo od modela 6DOF za slučaj kada nema vjetra i radit ćemo pomoću Eulerovih kutova. Pretpostavljamo da su komponente pogonske sile $\begin{bmatrix} F\cos\alpha_T & 0 & F\sin\alpha_T \end{bmatrix}^T$. Jednadžbe gibanja središta mase i oko središta mase zrakoplova u razvijenom obliku su :

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= rv - qw + \frac{T\cos\alpha_T}{m} + \frac{X}{m} - g\sin\vartheta \\
\dot{v} &= -ru + pw + \frac{Y}{m} + g\cos\vartheta\sin\phi \\
\dot{w} &= qu - pv + \frac{T\sin\alpha_T}{m} + \frac{Z}{m} + g\cos\vartheta\cos\phi
\end{aligned} \tag{12.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{L}{I_x} \\
\dot{q} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} rp + \frac{M}{I_y} \\
\dot{r} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} pq + \frac{N}{I_z}
\end{aligned} \tag{12.2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= p + (\sin\phi\, tg\theta) q + (\cos\phi\, tg\theta) r \\
\dot{\theta} &= (\cos\phi) q - (\sin\phi) r \\
\dot{\psi} &= \frac{\sin\phi}{\cos\theta} q + \frac{\cos\phi}{\cos\theta} r
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Nismo uzeli u obzir prve tri jednadžbe, jer se dinamički proces prijelaza iz jednoga u drugo ravnotežno stanje odvija na vrlo maloj promjeni visine, pa se gustoća i brzina zvuka gotovo ne mijenjaju, te nam nije potrebna visina leta. Aerodinamičke sile X, Y i Z i aerodinamički momenti L, M i N duž glavnih osi tromosti letjelice zadani su jednadžbama :

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\rho V^2}{2} S c_x\left(\alpha, \beta^2\right) & L &= \frac{\rho V^2}{2} S b\, c_\ell\left(\beta, r, p, \delta_n, \delta_\ell\right) \\
Y &= \frac{\rho V^2}{2} S c_y\left(\beta, p, r, \delta_n\right) & M &= \frac{\rho V^2}{2} S c_A c_m\left(\alpha, \dot{\alpha}, q, \delta_m\right) \\
Z &= \frac{\rho V^2}{2} S c_z\left(\alpha, \dot{\alpha}, q, \delta_m\right) & N &= \frac{\rho V^2}{2} S b\, c_n\left(\beta, r, p, \delta_n\right)
\end{aligned} \qquad 12.4$$

Gornji sustav diferencijalnih jednadžbi vrijedi za bilo koji režim leta. On određuje vektor stanja

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u & v & w & p & q & r & \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T \qquad 12.5$$

kao funkciju vremena. Taj vektor stanja zvat ćemo *stvarni* vektor stanja, jer odgovara stvarnom gibanju. Drugim riječima znači da je

$$u = x_1,\ v = x_2,\ w = x_3,\ p = x_4,\ q = x_5,\ r = x_6,\ \phi = x_7,\ \vartheta = x_8 \text{ i } \psi = x_9. \qquad 12.6$$

Na desnoj strani sustava diferencijalnih jednadžbi imamo vektor

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 \end{bmatrix}^T, \qquad 12.7$$

gdje nam je

$$\begin{aligned}
f_1 &= rv - qw + \frac{T\cos\alpha_T}{m} + \frac{X}{m} - g\sin\vartheta \\
f_2 &= -ru + pw + \frac{Y}{m} + g\cos\vartheta\sin\phi \\
f_3 &= qu - pv + \frac{T\sin\alpha_T}{m} + \frac{Z}{m} + g\cos\vartheta\cos\phi
\end{aligned} \qquad 12.8$$

$$\begin{aligned}
f_4 &= \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{L}{I_x} \\
f_5 &= \frac{I_z - I_x}{I_y} rp + \frac{M}{I_y} \\
f_6 &= \frac{I_x - I_y}{I_z} pq + \frac{N}{I_z}
\end{aligned} \qquad 12.9$$

$$\begin{aligned}
f_7 &= p + \left(\sin\phi\, tg\theta\right) q + \left(\cos\phi\, tg\theta\right) r \\
f_8 &= \left(\cos\phi\right) q - \left(\sin\phi\right) r \\
f_9 &= \frac{\sin\phi}{\cos\theta} q + \frac{\cos\phi}{\cos\theta} r
\end{aligned} \qquad 12.10$$

Članovi vektora **F** su funkcije članova vektora stanja. Osim vektora **X** i **F** uvodimo i vektor upravljanja

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \delta_\ell & \delta_m & \delta_n \end{bmatrix}^T \qquad 12.11$$

Vektor **F** ovisi o vektoru stanja, ali preko aerodinamičkih sila i momenata on je funkcija i vektora upravljanja. Zato cijeli sustav diferencijalnih jednadžbi 12.1-3 kratko pišemo:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{e}) \qquad 12.12$$

Taj sustav diferencijalnih jednadžbi određuje promjenu stanja letjelice tijekom vremena u ovisnosti o vektoru upravljanja. Taj sustav diferencijalnih jednadžbi nije pogodan za analizu ponašanja letjelice u ovisnosti o njenim parametrima, niti za izbor tih parametara da bi se letjelica ponašala kako se to a priori želi.

U ovim jednadžbama za sile i momente, brzina V i kutovi α i β funkcije su varijabla stanja *u, v* i *w* preko kinematičkih jednadžba:

$$\begin{aligned} u &= V\cos\alpha\cos\beta \\ v &= V\cos\alpha\sin\beta \\ w &= V\sin\alpha\,. \end{aligned} \qquad 12.13$$

Kako smo pretpostavili da nema vjetra, ne razlikujemo brzinu leta od aerodinamičke brzine jer su one jednake.

12.1.2 Referentno gibanje

Ravnotežno stanje u kome je bila letjelica prije nego što smo promijenili vektor upravljanja, nazivamo *referentno stanje.* Vektor stanja u takvom gibanju označit ćemo sa $\mathbf{X^0}$ i nazvati ga referentni vektor stanja.

$$\frac{d\mathbf{X}^0}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^0, \mathbf{e}^0) \qquad 12.14$$

Pretpostavit ćemo da su svi uvjeti nominalni (standardna atmosfera, nema vjetra, normalne težine itd.). Odabrat ćemo kao referentni let

- jednoli let:

$$V^0 = const\,, \qquad 12.15$$

- pravocrtni let (horizontalno ili u penjanju ili u spuštanju):

$$\chi^0 = 0 \qquad 12.16$$

$$\gamma^0 = const \qquad 12.17$$

Neka je u takvom referentnom letu vektor upravljanja $\mathbf{e}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \delta_m^0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Budući da nema klizanja (nema vjetra $v = 0$), niti kuta valjanja (pravocrtni let), onda su :

$$\psi^0 = \chi^0 = 0 \tag{12.18}$$

$$\vartheta^0 = \gamma^0 + \alpha^0 \tag{12.19}$$

U tom letu, pri konstantnoj brzini leta i konstantnoj gustoći zraka, napadni kut α^0 je konstantan, pa su konstanti kutovi osi letjelice ψ^0 i ϑ^0. Kada su sva tri de Sparreova kuta konstanti, onda su i sve tri kutne brzine jednake nuli. Konačno zaključujemo da je za izabrani referentni let:

$$\dot{u}^0 = \dot{v}^0 = \dot{w}^0 = 0 \tag{12.20}$$

$$p^0 = q^0 = r^0 = \dot{\phi}^0 = \dot{\vartheta}^0 = \dot{\psi}^0 = 0 \tag{12.21}$$

$$\begin{aligned} v^0 &= 0 \\ \phi^0 &= \psi^0 = 0 \end{aligned} \tag{12.22}$$

S obzirom da su za ovakvo referentno gibanje derivacije svih varijabla jednake nuli, matrični je oblik sustava diferencijalnih jednadžbi vektora stanja

$$0 = \mathbf{F}\left(\mathbf{X}^0, \mathbf{e}^0\right) \tag{12.23}$$

koji nam omogućuje da za zadani referentni let $\mathbf{X}^0$ odredimo potrebni vektor upravljanja $\mathbf{e}^0$, ili obrnuto.

12.1.3 Linearne diferencijalne jednadžbe poremećaja

Kada promijenimo otklon upravljačkih površina $\mathbf{e} \neq \mathbf{e^0}$ vrijednosti varijabli vektora stanja bit će različite od referentnih vrijednosti (uspoređujemo ih u istom trenutku *t*), a tu razliku između *stvarnih* i *referentnih* vrijednosti označavamo sa $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, a za cijeli vektor stanja sa $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^0$, i nazivamo ih *poremećaj vektora stanja*. Uzrok koji je izazvao poremećaje

$$\Delta\mathbf{e} = \mathbf{e} - \mathbf{e}^0 = \begin{bmatrix} \Delta\delta_\ell & \Delta\delta_m & \Delta\delta_n \end{bmatrix}^T$$

nazivamo također poremećaj (ili *perturbacija*).

U sustavu diferencijalnih jednadžbi vektora stanja 12.12

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{e})$$

zamijenimo li stvarni vektor stanja s referentnim, povećanim za poremećaj, kao i vektor upravljanja s referentnim povećanim za poremećaj vektora upravljanja, onda dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi stvarnog stanja:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{X^0}+\Delta\mathbf{X}\right)=\mathbf{F}\left(\mathbf{X^0}+\Delta\mathbf{X},\mathbf{e}+\Delta\mathbf{e}\right)$$

Kad razvijmo u Taylorov red članove matrice **F** oko referentnog stanja, dobit ćemo

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{X^0}+\mathit{\Delta}\mathbf{X},\mathbf{e}^0+\mathit{\Delta}\mathbf{e},t\right)=\mathbf{F}\left(\mathbf{X^0},\mathbf{e^0},t\right)+\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}\right)^0\mathit{\Delta}\mathbf{X}+\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{e}}\right)^0\mathit{\Delta}\mathbf{e}+\ldots$$

A je kvadratna matrica koju čine parcijalne derivacije stupca **F** po varijablama stanja **X:**.

$$\mathbf{A}=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_9}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_9}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_9}{\partial x_1} & \frac{\partial f_9}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_9}{\partial x_9}\end{bmatrix} \qquad 12.24$$

a **B** je matrica koja pretstavlja derivaciju stupca **F** po parametrima upravljanja (onoliko stupaca koliko je parametara upravljanja, a broj vrsta je jednak dimenziji vektora stanja).

$$\mathbf{B}=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{e}}==\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\delta_\ell} & \frac{\partial f_1}{\partial\delta_m} & \frac{\partial f_1}{\partial\delta_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial\delta_\ell} & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_9}{\partial\delta_\ell} & \cdots & \frac{\partial f_9}{\partial\delta_m}\end{bmatrix} \qquad 12.25$$

Opći član matrice **A** u redu *i* u stupcu *j* je

$$a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Kada provodimo linearizaciju, pretpostavljamo da se realni vektor stanja **X** ne razlikuje mnogo od referentnog vektora stanja $\mathbf{X}^0$ tj. da su poremećaji $\mathit{\Delta}\mathbf{X}$ i $\mathit{\Delta}\mathbf{e}$ male veličine. To nam omogućuje da pri razvijanju u red funkcije **F** zanemarimo produkte poremećaja kao male veličine višega reda u odnosu na bilo koji poremećaj. Tako u daljnjem radu nećemo imati niti produkte poremećaja niti njihove stupnjeve nego ćemo imati linearne jednadžbe po poremećajima. Kasnije, kada budemo primjenjivali linearizirane diferencijalne jednadžbe trebamo voditi računa da ti uvjeti budu zadovoljeni.

Oduzimanjem diferencijalnih jednadžbi za referentno stanje 12.14 od diferencijalnih jednadžbi za stvarno stanje 12.12 dobivamo:

$$\frac{d}{dt}\mathit{\Delta}\mathbf{X}=\mathbf{A}\mathit{\Delta}\mathbf{X}+\mathbf{B}\mathit{\Delta}\mathbf{e} \qquad 12.26$$

To su tzv. diferencijalne jednadžbe poremećaja, koje su linearne po poremećajima $\Delta\mathbf{X}$ i $\Delta\mathbf{e}$. Obratimo pažnju na to da su članovi matrica **A** i **B** funkcije od vremena i od referentnog stanja, što znači da se svaki član tih matrica određuje na temelju referentnog vektora stanja $\mathbf{X^0}$ i za referentni vektor upravljanja $\mathbf{e}^0$.

Činjenica je da linearizaciju jednadžbi možemo raditi po istim pravilima po kojima izvodimo diferenciranje jednadžbi.

12.2 Linearizacija model 6DOF

12.2.1 Linearizacija kinematičkih jednadžbi

Početćemo s jednadžbama veze između brzina i kutova:

$$\begin{aligned} u &= V\cos\alpha\cos\beta \\ v &= V\cos\alpha\sin\beta \\ w &= V\sin\alpha \end{aligned} \qquad 12.27$$

Primijenimo pravilo diferenciranja umjesto linearizacije na prvu jednadžbu:

$$\Delta u = \Delta V\cos\alpha^0\cos\beta^0 - V^0\sin\alpha^0\Delta\alpha\cos\beta^0 - V^0\cos\alpha^0\sin\beta^0\Delta\beta$$

Kako u referentnom stanju nema klizanja $\beta^0 = 0$, dobivamo linearizirani prvu jednadžbu:

$$\Delta u = \Delta V\cos\alpha^0 - V^0\sin\alpha^0\Delta\alpha$$

Na isti način dobivamo i preostale dvije linearizirane jednadžbe:

$$\begin{aligned} \Delta v &= V^o\cos\alpha^o\Delta\beta \\ \Delta w &= \Delta V\sin\alpha^o + V^o\cos\alpha^o\Delta\alpha \end{aligned}$$

U referentnom režimu napadni kut je mali. Zato u ovim jednadžbama možemo zamijeniti $\sin\alpha^0 \approx \alpha^0$ i $\cos\alpha^0 \approx 1$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta V - V^0\alpha^0\Delta\alpha \\ \Delta v &= V^o\Delta\beta \\ \Delta w &= \Delta V\alpha^o + V^o\Delta\alpha \end{aligned}$$

Po svojoj veličini produkt $V^0\alpha^0$ reda je veličine poremećaja brzine, te je drugi član na desnoj strani mala veličina drugoga reda koju možemo zanemariti. Isto tako produkt $\Delta V\alpha^0$ na desnoj strani treće jednadžbe predstavlja malu veličinu drugoga reda koju možemo zanemariti. Tako dobivamo konačno:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \Delta V\\ \Delta v &= V^o \Delta\beta\\ \Delta w &= V^o \Delta\alpha\end{aligned} \qquad 12.28$$

12.2.2 Linearizacija sila

Za mlaazne motore smatramo da poremećaji gibanja ne utječu na potisnu silu pa nema poremećaja pogonske sile, a za elisne motore usvajamo da nema poremećaja snage. Prema tome, za elisne motore je

$$\Delta(T \cdot V) = 0\,,$$

ili

$$\Delta T \cdot V^0 + T^0 \Delta V = 0\,.$$

Iz ove jednadžbe dobivamo da je poremećaj pogonske sile elisnog motora

$$\Delta T = -\frac{\Delta V}{V^o} T^o\,, \qquad 12.29$$

a za mlazne motore je

$$\Delta T = 0\,. \qquad 12.30$$

Komponente sile Zemljine teže duž osi tromosti zrakoplova jesu:

$$\mathbf{L}_{FO}(\phi, \vartheta, \psi)\begin{bmatrix}0\\0\\mg\end{bmatrix} = mg\begin{bmatrix}-\sin\vartheta\\ \sin\phi\cos\vartheta\\ \cos\phi\cos\vartheta\end{bmatrix}$$

Primjenjujući pravilo diferenciranja dobivamo poremećaje komponente sile Zemljine teže:

$$mg\begin{bmatrix}-\cos\vartheta^o \Delta\vartheta\\ \cos\phi^o \Delta\phi\cos\vartheta^o - \sin\phi^o \sin\vartheta^o \Delta\vartheta\\ -\sin\phi^o \Delta\phi\cos\vartheta^o - \cos\phi^o \sin\vartheta^o \Delta\vartheta\end{bmatrix}$$

Za referentni let je $\phi^o = 0$, te dobivamo konačno poremećaje komponenata sile Zemljine teže:

$$mg\begin{bmatrix}-\cos\vartheta^o \Delta\vartheta\\ \cos\vartheta^o \Delta\phi\\ -\sin\vartheta^o \Delta\vartheta\end{bmatrix} \qquad 12.31$$

Linearizacija komponenata aerodinamičke sile:

$$X = \frac{\rho V^2}{2} S C_X\left(\alpha, \beta^2\right)$$
$$Y = \frac{\rho V^2}{2} S C_Y\left(\beta, p^*, r^*, \delta_n\right) \qquad 12.32$$
$$Z = \frac{\rho V^2}{2} S C_Z\left(\alpha, \dot{\alpha}^*, q^*, \delta_m\right)$$

prema pravilu o diferenciranju, daje poremećaje:

$$\Delta X = \rho V^0 \Delta V\, S C_X^0 + \frac{\rho V^{0\,2}}{2} S \cdot \Delta C_X$$
$$\Delta Y = \rho V^0 \Delta V\, S C_Y^0 + \frac{\rho V^{0\,2}}{2} S \cdot \Delta C_Y$$
$$\Delta Z = \rho V^0 \Delta V\, S C_Z^0 + \frac{\rho V^{0\,2}}{2} S \cdot \Delta C_Z$$

Poremećaji aerodinamičkih koeficijenata sila su:

$$\Delta C_X = C_{X\alpha}^o \Delta\alpha + C_{X\beta^2}^o 2\beta^o \Delta\beta$$
$$\Delta C_Y = C_{Y\beta}^o \Delta\beta + C_{Yp}^o \Delta p^* + C_{Yr}^o \Delta r^* + C_{Y\delta_n}^o \Delta\delta_n \qquad 12.33$$
$$\Delta C_Z = C_{Z\alpha}^o \Delta\alpha + C_{Z\dot{\alpha}}^o \Delta\dot{\alpha}^* + C_{Zq}^o \Delta q^* + C_{Z\delta_m}^o \Delta\delta_m$$

Poremećaj bezdimenzijske kutne brzine valjanja je

$$\Delta p^* = \Delta\left(\frac{bp}{V}\right) = \frac{b\Delta p V^0 - b p_0 \Delta V}{\left(V^0\right)^2} = \frac{b}{V^0}\Delta p\,, \qquad 12.34$$

jer je $p_0 = 0$. Isto tako su i poremećaji bezdimenzijskih kutnih brzina:

$$\Delta q^* = \frac{c_A}{V^0}\Delta q \qquad 12.35$$

$$\Delta r^* = \frac{b}{V^0}\Delta r \qquad 12.36$$

Kako je u referentnom stanju $C_Y^o = 0$, bit će konačno poremećaji aerodinamičkih brzina:

$$\Delta X = \rho V^o S C_X^o \Delta V + \frac{\rho V^{o\,2}}{2} S C_{X\alpha}^o \Delta\alpha$$
$$\Delta Y = \frac{\rho V^{o\,2}}{2} S\left(C_{Y\beta}^o \Delta\beta + C_{Yp}^o \Delta p \frac{b}{V^0} + C_{Yr}^o \Delta r \frac{b}{V^0} + C_{Y\delta_n}^o \Delta\delta_n \right)$$
$$\Delta Z = \rho V^o S C_Z^o \Delta V + \frac{\rho V^{o\,2}}{2} S\left(C_{Z\alpha}^o \Delta\alpha + C_{Z\dot{\alpha}}^o \Delta\dot{\alpha} \frac{c_A}{V^0} + C_{Zq}^o \Delta q \frac{c_A}{V^0} + C_{Z\delta_m}^o \Delta\delta_m \right)$$

U ove jednadžbe uvodimo oznake za koeficijente dinamičke stabilnosti uz poremećaje:

$$X_u^o = \frac{1}{m}\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\rho V^o S}{m} C_X^o \quad Y_\beta^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial \beta} = \frac{\rho V^{o2} S}{2m} C_{Y\beta}^o \quad Z_u^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\rho V^o S}{m} C_Z^o$$

$$X_\alpha^o = \frac{1}{m}\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{\rho V^{o2} S}{2m} C_{X\alpha}^o \quad Y_p^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial p} = \frac{\rho V^o Sb}{2m} C_{Yp}^o \quad Z_\alpha^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = \frac{\rho V^{o2} S}{2m} C_{Z\alpha}^o$$

$$Y_r^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{\rho V^o Sb}{2m} C_{Yr}^o \quad Z_{\dot\alpha}^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial \dot\alpha} = \frac{\rho V^o Sc_A}{2m} C_{Z\dot\alpha}^o \qquad 12.37$$

$$Y_{\delta_n}^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial \delta_n} = \frac{\rho V^{o2} S}{2m} C_{Y\delta_n}^o \quad Z_q^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\rho V^o Sc_A}{2m} C_{Zq}^o$$

$$Z_{\delta_m}^o = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial \delta_m} = \frac{\rho V^{o2} S}{2m} C_{Z\delta_m}^o$$

Svi ovi koeficijenti dinamičke stabilnosti trebaju biti izračunani za vrijednosti parametara u referentnom stanju. S tim koeficijentima jednadžbe možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta X}{m} &= X_u^o \Delta u + X_\alpha^o \Delta\alpha \\
\frac{\Delta Y}{m} &= Y_\beta^o \Delta\beta + Y_p^0 \Delta p + Y_r^o \Delta r + Y_{\delta_n}^o \Delta\delta_n \\
\frac{\Delta Z}{m} &= Z_u^o \Delta u + Z_\alpha^o \Delta\alpha + Z_{\dot\alpha}^o \Delta\dot\alpha + Z_q^o \Delta q + Z_{\delta_m}^o \Delta\delta_m
\end{aligned} \qquad 12.38$$

12.2.3 Linearizacija jednadžbi gibanja središta mase

Linearizaciju prvih triju jednadžbi gibanja središta mase:

$$\begin{aligned}
\dot u &= rv - qw + \frac{T\cos\alpha_T}{m} + \frac{X}{m} - g\sin\vartheta \\
\dot v &= -ru + pw + \frac{Y}{m} + g\cos\vartheta\sin\phi \\
\dot w &= qu - pv + \frac{T\sin\alpha_T}{m} + \frac{Z}{m} + g\cos\vartheta\cos\phi
\end{aligned} \qquad 12.39$$

izvest ćemo po pravilu diferenciranja. Tako dobivamo

$$\begin{aligned}
\Delta\dot u &= r^o\Delta v + v^o\Delta r - q^o\Delta w - w^o\Delta q + \frac{\Delta T\cos\alpha_T}{m} + \frac{\Delta X}{m} - g\cos\vartheta^o\Delta\vartheta \\
\Delta\dot v &= -r^o\Delta u - u^o\Delta r + p^o\Delta w + w^o\Delta p + \frac{\Delta Y}{m} + g\cos\vartheta^o\Delta\phi \\
\Delta\dot w &= q^o\Delta u + u^o\Delta q - p^o\Delta v - v^o\Delta p + \frac{\Delta T\sin\alpha_T}{m} + \frac{\Delta Z}{m} - g\sin\vartheta^o\Delta\vartheta
\end{aligned} \qquad 12.40$$

U referentnom letu je $v^0 = 0$ kao i sve kutne brzine $p^o = q^o = r^o = 0$. Kut α^0 u referentnom letu je obično mala veličina, te je $w^o = u^o\alpha^o$ reda veličina poremećaja Δu ili Δw. Zato se njegovi produkti sa drugim poremećajima mogu zanemaruju kao male veličine drugog reda. To nam omogućava da u prvoj jednadžbi zanemarimo produkt $w^0 \Delta q$, a u drugoj $w^0 \Delta p$. Tako linearizirane jednadžbe poremećaja gibanja središta mase dobivaju oblik:

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{u} &= \frac{\Delta T\cos\alpha_T}{m} + \frac{\Delta X}{m} - g\cos\vartheta^o \Delta\vartheta \\
\Delta\dot{v} &= -u^o\Delta r + \frac{\Delta Y}{m} + g\cos\vartheta^o\Delta\phi \\
\Delta\dot{w} &= u^o\Delta q + \frac{\Delta T\sin\alpha_T}{m} + \frac{\Delta Z}{m} - g\sin\vartheta^o\Delta\vartheta
\end{aligned} \qquad 12.41$$

Derivacijom lineariziranih jednadžbi veza između kutova i komponenti brzine dobivamo:

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{v} &= V^o \Delta\dot{\beta} \\
\Delta\dot{w} &= V^o \Delta\dot{\alpha}
\end{aligned} \qquad 12.42$$

Zamjenom poremećaja aerodinamičkih sila $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ i poremećaja derivacija bočnih brzina $\Delta\dot{v}, \Delta\dot{w}$ u gornje linearizirane jednadžbe poremećaja gibanja središta mase, bit će konačno:

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{u} &= \frac{\Delta T\cos\alpha_T}{m} + X_u^o\Delta u + X_\alpha^o\Delta\alpha - g\cos\vartheta^o\Delta\vartheta \\
u^o\Delta\dot{\beta} &= -u^0\Delta r + Y_\beta^o\Delta\beta + Y_p^0\Delta p + Y_r^o\Delta r + Y_{\delta_n}^o\Delta\delta_n + g\cos\vartheta^o\Delta\phi \\
u^o\Delta\dot{\alpha} &= u^0\Delta q + \frac{\Delta T\sin\alpha_T}{m} + Z_u^o\Delta u + Z_\alpha^o\Delta\alpha + Z_{\dot{\alpha}}^o\Delta\dot{\alpha} + Z_q^o\Delta q + Z_{\delta_m}^o\Delta\delta_m - g\sin\vartheta^o\Delta\vartheta
\end{aligned} \qquad 12.43$$

Za <u>mlazne motore</u> nema poremećaja potiska, pa dijeljenjem jednadžbe druge sa u^0 i treće jednadžbe sa $u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{u} &= X_u^o\Delta u + X_\alpha^o\Delta\alpha - g\cos\vartheta^o\Delta\vartheta \\
\Delta\dot{\beta} &= \frac{Y_\beta^o}{u^0}\Delta\beta + \frac{Y_p^0}{u^0}\Delta p + \left(-1 + \frac{Y_r^o}{u^0}\right)\Delta r + \frac{g\cos\vartheta^o}{u^0}\Delta\phi + \frac{Y_{\delta_n}^o}{u^0}\Delta\delta_n \\
\Delta\dot{\alpha} &= \frac{Z_u^o}{u^o - Z_{\dot{\alpha}}^o}\Delta u + \frac{Z_\alpha^o}{u^o - Z_{\dot{\alpha}}^o}\Delta\alpha + \frac{u^o + Z_q^o}{u^o - Z_{\dot{\alpha}}^o}\Delta q - \frac{g\sin\vartheta^o}{u^o - Z_{\dot{\alpha}}^o}\Delta\vartheta + \frac{Z_{\delta_m}^o}{u^o - Z_{\dot{\alpha}}^o}\Delta\delta_m
\end{aligned} \qquad 12.44$$

Za zrakoplove s <u>elisnim motorima</u> poremećaj pogonske sile određen je jednadžbom 12.29

$$\Delta T = -\frac{T^o}{u^0}\Delta u$$

pa gornje jednadžbe 12.43 za zrakoplove s elisnim motorima imaju oblik:

$$\Delta\dot{u} = \left(X_u^o - \frac{T^o \cos\alpha_T}{mu^0} \right)\Delta u + X_\alpha^o \Delta\alpha - g\cos\vartheta^o \Delta\vartheta$$

$$\Delta\dot{\beta} = \frac{Y_\beta^o}{u^0}\Delta\beta + \frac{Y_p^0}{u^0}\Delta p + \left(-1 + \frac{Y_r^o}{u^0} \right)\Delta r + \frac{g\cos\vartheta^o}{u^0}\Delta\phi + \frac{Y_{\delta_n}^o}{u^0}\Delta\delta_n \qquad 12.45$$

$$\Delta\dot{\alpha} = \frac{Z_u^o - \dfrac{T^o \sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta u + \frac{Z_\alpha^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta\alpha + \frac{u^o + Z_q^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta q - \frac{g\sin\vartheta^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta\vartheta + \frac{Z_{\delta_m}^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta\delta_m$$

12.2.4 Linearizacija kutnih brzina

Linearizaciju jednadžbi:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + (\sin\phi\, tg\theta)q + (\cos\phi\, tg\theta)r \\ \dot{\theta} &= (\cos\phi)q - (\sin\phi)r \\ \dot{\psi} &= \frac{\sin\phi}{\cos\theta}q + \frac{\cos\phi}{\cos\theta}r \end{aligned} \qquad 12.46$$

izvodimo primjenom pravila diferenciranja. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\phi} &= \Delta p + \cos\phi^0 \Delta\phi \cdot tg\vartheta^0 \cdot q^0 + \sin\phi^0 \frac{\Delta\vartheta}{\cos^2\vartheta^0} q^0 + \sin\phi^0 tg\vartheta^0 \Delta q - \\ &\quad - \sin\phi^0 \Delta\phi \cdot tg\vartheta^0 \cdot r^0 + \cos\phi^0 \frac{\Delta\vartheta}{\cos^2\vartheta^0} r^0 + \cos\phi^0 tg\vartheta^0 \Delta r \\ \Delta\dot{\vartheta} &= -\sin\phi^o \Delta\phi \cdot q^0 + \cos\phi^o \Delta q - \cos\phi^o \Delta\phi \cdot r^0 - \sin\phi^o \Delta r \\ \Delta\dot{\psi} &= \Delta\left(\frac{\sin\phi}{\cos\vartheta} \right) \cdot q^0 + \frac{\sin\phi^0}{\cos\vartheta^0} \cdot \Delta q + \Delta\left(\frac{\cos\phi}{\cos\vartheta} \right) \cdot r^0 + \frac{\cos\phi^0}{\cos\vartheta^0} \cdot \Delta r \end{aligned}$$

U tim jednadžbama treba uzeti u obzir da su u referentnom stanju sve kutne brzine p^0, q^0 i r^0 jednake nuli (jednadžbe 12.21) kao i kut valjanja ϕ^0 (jednadžbe 12.22). Tako konačno dobivamo linearizirane jednadžbe:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\phi} &= \Delta p + \tan\vartheta^0 \Delta r \\ \Delta\dot{\vartheta} &= \Delta q \\ \Delta\dot{\psi} &= \frac{\Delta r}{\cos\theta^0} \end{aligned} \qquad 12.47$$

12.2.5 Linearizacija komponenata aerodinamičkog momenta

Ovisnosti komponenata aerodinamičkog momenta zrakoplova o parametarima dane su jednadžbama:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\rho V^2}{2} SbC_\ell\left(\beta, p^*, r^*, \delta_\ell, \delta_n\right) \\ M &= \frac{\rho V^2}{2} Sc_A C_m\left(\alpha, \dot{\alpha}^*, q^*, \delta_m\right) \\ N &= \frac{\rho V^2}{2} SbC_n\left(\beta, p^*, r^*, \delta_\ell, \delta_n\right) \end{aligned} \qquad 12.48$$

Primjenom pravila diferenciranja dobivamo:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \rho V^o \Delta V\, SbC_\ell^o + \frac{\rho V^{o2}}{2} Sb \cdot \Delta C_\ell \\ \Delta M &= \rho V^o \Delta V\, Sc_A C_m^o + \frac{\rho V^{o2}}{2} Sc_A \cdot \Delta C_m \\ \Delta N &= \rho V^o \Delta V\, SbC_n^o + \frac{\rho V^{o2}}{2} Sb \cdot \Delta C_n \end{aligned} \qquad 12.49$$

U ravnotežnom stanju C_ℓ^o, C_m^o, C_n^o jednaki su nuli, a poremećaji aerodinamičkih koeficijenata momenata su:

$$\begin{aligned} \Delta C_\ell &= C_{\ell\beta}^o \Delta\beta + C_{\ell p}^o \Delta p \frac{b}{V^0} + C_{\ell r}^o \Delta r \frac{b}{V^0} + C_{\ell\delta_\ell}^o \Delta\delta_\ell + C_{\ell\delta_n}^o \Delta\delta_n \\ \Delta C_m &= C_{m\alpha}^o \Delta\alpha + C_{m\dot{\alpha}}^o \Delta\dot{\alpha} \frac{c_A}{V^0} + C_{mq}^o \Delta q \frac{c_A}{V^0} + C_{m\delta_m}^o \Delta\delta_m \\ \Delta C_n &= C_{n\beta}^o \Delta\beta + C_{np}^o \Delta p \frac{b}{V^o} + C_{nr}^o \Delta r \frac{b}{V^o} + C_{n\delta_\ell}^0 \Delta\delta_\ell + C_{n\delta_n}^o \Delta\delta_n \end{aligned} \qquad 12.50$$

Uvest ćemo koeficijente momenata dinamičke stabilnosti:

$$\begin{aligned} & L_\beta = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial\beta} = \frac{\rho V^2 Sb}{2I_x} C_{\ell\beta} && M_\alpha = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial\alpha} = \frac{\rho V^2 Sc_A}{2I_y} C_{m\alpha} && N_\beta = \frac{1}{I_z}\frac{\partial N}{\partial\beta} = \frac{\rho V^2 Sb}{2I_z} C_{n\beta} \\ & L_p = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\rho VSb^2}{2I_x} C_{\ell p} && M_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial\dot{\alpha}} = \frac{\rho VSc_A^2}{2I_y} C_{m\dot{\alpha}} && N_p = \frac{1}{I_z}\frac{\partial N}{\partial p} = \frac{\rho VSb^2}{2I_z} C_{np} \\ & L_r = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\rho VSb^2}{2I_x} C_{\ell r} && M_q = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial q} = \frac{\rho VSc_A^2}{2I_y} C_{mq} && N_r = \frac{1}{I_z}\frac{\partial N}{\partial r} = \frac{\rho VSb^2}{2I_z} C_{nr} \\ & L_{\delta_n} = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial\delta_n} = \frac{\rho V^2 Sb}{2I_x} C_{\ell\delta_n} && M_{\delta_m} = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial\delta_m} = \frac{\rho V^2 Sc_A}{2I_y} C_{m\delta_m} && N_{\delta_n} = \frac{1}{I_z}\frac{\partial N}{\partial\delta_n} = \frac{\rho V^2 Sb}{2I_z} C_{n\delta_n} \\ & L_{\delta_\ell} = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial\delta_\ell} = \frac{\rho V^2 Sb}{2I_x} C_{\ell\delta_\ell} \end{aligned}$$

12.51

Napomenimo da sve ove koeficijente treba izračunati za referentno stanje. Sa ovim oznakama bit će:

$$\frac{\Delta L}{I_x} = L^0_\beta \Delta\beta + L^0_p \Delta p + L^0_r \Delta r + L^0_{\delta_\ell} \Delta\delta_\ell + L^0_{\delta_n} \Delta\delta_n$$
$$\frac{\Delta M}{I_y} = M^0_\alpha \Delta\alpha + M^0_{\dot\alpha} \Delta\dot\alpha + M^0_q \Delta q + M^0_{\delta_m} \Delta\delta_m \qquad 12.52$$
$$\frac{\Delta N}{I_z} = N^0_\beta \Delta\beta + N^0_r \Delta r + N^0_p \Delta\dot\phi + N^0_{\delta_\ell} \Delta\delta_\ell + N^0_{\delta_n} \Delta\delta_n$$

12.2.6 Linearizacija jednadžbi gibanja zrakoplova oko središta mase

Jednadžbe gibanja oko središta mase za glavne osi tromosti su:

$$\begin{aligned} I_x \dot p &= (I_y - I_z) qr + L \\ I_y \dot q &= (I_z - I_x) rp + M \\ I_z \dot r &= (I_x - I_y) pq + N \end{aligned} \qquad 12.53$$

Pravilom diferenciranja dobivamo

$$\begin{aligned} I_x \Delta\dot p &= (I_y - I_z)\cdot(\Delta q\cdot p + q\cdot\Delta p) + \Delta L \\ I_y \Delta\dot q &= (I_z - I_x)\cdot(\Delta r\cdot p + r\cdot\Delta p) + \Delta M \\ I_z \Delta\dot r &= (I_x - I_y)\cdot(\Delta p\cdot q + p\cdot\Delta q) + \Delta N \end{aligned}$$

U ravnotežnom stanju sve kutne brzine jednake su nuli te ove jednadžbe dobivaju oblik:

$$\begin{aligned} I_x \Delta\dot p &= \Delta L \\ I_y \Delta\dot q &= \Delta M \\ I_z \Delta\dot r &= \Delta N \end{aligned} \qquad 12.54$$

ili poslije linearizacije aerodinamičkih momenata:

$$\begin{aligned} \Delta\dot p &= L^0_\beta \Delta\beta + L^0_p \Delta p + L^0_r \Delta r + L^0_{\delta_\ell} \Delta\delta_\ell + L^0_{\delta_n} \Delta\delta_n \\ \Delta\dot q &= M^0_\alpha \Delta\alpha + M^0_{\dot\alpha} \Delta\dot\alpha + M^0_q \Delta q + M^0_{\delta_m} \Delta\delta_m \\ \Delta\dot r &= N^0_\beta \Delta\beta + N^0_p \Delta p + N^0_r \Delta r + N^0_{\delta_\ell} \Delta\delta_\ell + N^0_{\delta_n} \Delta\delta_n \end{aligned} \qquad 12.55$$

U drugoj jednadžbi na desnoj strani imamo poremećaj derivacije napadnog kuta $\Delta\dot\alpha$. Taj kut eliminiramo pomoću treće jednadžbe gibanja središta mase:

$$\Delta\dot\alpha = \frac{Z^o_u - \dfrac{T^o \sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta u + \frac{Z^o_\alpha}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta\alpha + \frac{u^o + Z^o_q}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta q - \frac{g\sin\vartheta^o}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta\vartheta + \frac{Z^o_{\delta_m}}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta\delta_m \qquad 12.56$$

Sređivanjem dobivamo konačno:

$$\Delta\dot{p} = L^0_\beta \Delta\beta + L^0_p \Delta p + L^0_r \Delta r + L^0_{\delta_\ell}\Delta\delta_\ell + L^0_{\delta_n}\Delta\delta_n$$

$$\Delta\dot{q} = M^0_{\dot\alpha}\frac{Z^o_u - \dfrac{T^o \sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta u + \left(M^0_\alpha + \frac{M^0_{\dot\alpha} Z^o_\alpha}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\right)\Delta\alpha - \frac{M^0_{\dot\alpha} g \sin\vartheta^o}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta\vartheta + \left(M^0_q + M^0_{\dot\alpha}\frac{u^o + Z^o_q}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\right)\Delta q$$
$$+\left(M^0_{\delta_m} + \frac{M^0_{\dot\alpha} Z^o_{\delta_m}}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\right)\Delta\delta_m$$

$$\Delta\dot{r} = N^0_\beta \Delta\beta + N^0_p \Delta p + N^0_r \Delta r + N^0_{\delta_\ell}\Delta\delta_\ell + N^0_{\delta_n}\Delta\delta_n$$

12.57

12.2.7 Linearni model zrakoplova

Objedinjavanjem lineariziranih jednadžbi gibanja središta mase i oko središta mase dobivamo sustav linearnih jednadžbi prijelaznog procesa. Prve tri linearizirane jednadžbe gibanja središta mase malo se razlikuju za zrakoplove s elisnim pogonom od jednadžba za zrakoplove s mlaznim pogonom, dok su linearizirane jednadžbe za gibanje oko središta mase iste. Zato ćemo objedinjavanjem dobiti dva različita sustava jednadžbi.

Za zrakoplove s mlaznim pogonom:

$$\Delta\dot{u} = X^o_u \Delta u + X^o_\alpha \Delta\alpha - g\cos\vartheta^o \Delta\vartheta$$

$$\Delta\dot\beta = \frac{Y^o_\beta}{u^0}\Delta\beta + \frac{Y^0_p}{u^0}\Delta p + \left(-1 + \frac{Y^o_r}{u^0}\right)\Delta r + \frac{g\cos\vartheta^o}{u^0}\Delta\phi + \frac{Y^o_{\delta_n}}{u^0}\Delta\delta_n$$

$$\Delta\dot\alpha = \frac{Z^o_u}{u^o - Z^o_{\dot\alpha}}\Delta u + \frac{Z^o_\alpha}{u^o - Z^o_{\dot\alpha}}\Delta\alpha + \frac{u^o + Z^o_q}{u^o - Z^o_{\dot\alpha}}\Delta q - \frac{g\sin\vartheta^o}{u^o - Z^o_{\dot\alpha}}\Delta\vartheta + \frac{Z^o_{\delta_m}}{u^o - Z^o_{\dot\alpha}}\Delta\delta_m$$

$$\Delta\dot{p} = L^0_\beta \Delta\beta + L^0_p \Delta p + L^0_r \Delta r + L^0_{\delta_\ell}\Delta\delta_\ell + L^0_{\delta_n}\Delta\delta_n$$

$$\Delta\dot{q} = M^0_{\dot\alpha}\frac{Z^o_u - \dfrac{T^o \sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta u + \left(M^0_\alpha + \frac{M^0_{\dot\alpha} Z^o_\alpha}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\right)\Delta\alpha - \frac{M^0_{\dot\alpha} g \sin\vartheta^o}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\Delta\vartheta +$$
$$+\left(M^0_q + M^0_{\dot\alpha}\frac{u^o + Z^o_q}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\right)\Delta q + \left(M^0_{\delta_m} + \frac{M^0_{\dot\alpha} Z^o_{\delta_m}}{u^0 - Z^0_{\dot\alpha}}\right)\Delta\delta_m \qquad 12.58$$

$$\Delta\dot{r} = N^0_\beta \Delta\beta + N^0_p \Delta p + N^0_r \Delta r + N^0_{\delta_\ell}\Delta\delta_\ell + N^0_{\delta_n}\Delta\delta_n$$

$$\Delta\dot\phi = \Delta p + \tan\vartheta^0 \Delta r$$
$$\Delta\dot\vartheta = \Delta q$$
$$\Delta\dot\psi = \frac{\Delta r}{\cos\theta^0}$$

Za zrakoplove s elisnim pogonom sustav diferencijalnih jednadžbi poremećaja ima oblik:

$$\Delta\dot{u} = \left(X_u^o - \frac{T^o \cos\alpha_T}{mu} \right) \Delta u + X_\alpha^o \Delta\alpha - g\cos\vartheta^o \Delta\vartheta$$

$$\Delta\dot{\beta} = \frac{Y_\beta^o}{u^0}\Delta\beta + \frac{Y_p^0}{u^0}\Delta p + \left(-1 + \frac{Y_r^o}{u^0} \right)\Delta r + \frac{g\cos\vartheta^o}{u^0}\Delta\phi + \frac{Y_{\delta_n}^o}{u^0}\Delta\delta_n$$

$$\Delta\dot{\alpha} = \frac{Z_u^o - \dfrac{T^o \sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta u + \frac{Z_\alpha^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta\alpha + \frac{u^o + Z_q^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta q - \frac{g\sin\vartheta^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta\vartheta + \frac{Z_{\delta_m}^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta\delta_m$$

$$\Delta\dot{p} = L_\beta^0 \Delta\beta + L_p^0 \Delta p + L_r^0 \Delta r + L_{\delta_\ell}^0 \Delta\delta_\ell + L_{\delta_n}^0 \Delta\delta_n$$

$$\Delta\dot{q} = M_{\dot{\alpha}}^0 \frac{Z_u^o - \dfrac{T^o \sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta u + \left(M_\alpha^0 + \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 Z_\alpha^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0} \right)\Delta\alpha - \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 g \sin\vartheta^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta\vartheta +$$

$$+ \left(M_q^0 + M_{\dot{\alpha}}^0 \frac{u^o + Z_q^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0} \right)\Delta q + \left(M_{\delta_m}^0 + \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 Z_{\delta_m}^o}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0} \right)\Delta\delta_m \qquad 12.59$$

$$\Delta\dot{r} = N_\beta^0 \Delta\beta + N_p^0 \Delta p + N_r^0 \Delta r + N_{\delta_\ell}^0 \Delta\delta_\ell + N_{\delta_n}^0 \Delta\delta_n$$

$$\Delta\dot{\phi} = \Delta p + \tan\vartheta^0 \Delta r$$

$$\Delta\dot{\vartheta} = \Delta q$$

$$\Delta\dot{\psi} = \frac{\Delta r}{\cos\theta^0}$$

U oba slučaja, u jednadžbama imamo devet varijabli

$$\Delta u \quad \Delta\beta \quad \Delta\alpha \quad \Delta p \quad \Delta q \quad \Delta r \quad \Delta\phi \quad \Delta\vartheta \quad \Delta\psi$$

koje su funkcije vremena, i tri zadana otklona $\Delta\delta_\ell \quad \Delta\delta_m \quad \Delta\delta_n$. Koeficijenti uz varijable i uz zadane otklone poznate su konstante.