

## 13 DINAMIČKA STABILNOST UZDUŽNOG GIBANJA

### 13.1 Modovi uzdužnog gibanja

Sustav linearnih jednadžbi zrakoplova može se rastaviti na dva podsustava koji se rješavaju neovisno. Prvi podsustav čine četiri jednadžbe gibanja s četiri varijable:  $\Delta u$ ,  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \theta$  i  $\Delta q$ . To su: prva i treća jednadžba gibanja središta mase, druga jednadžba gibanja oko središta mase i druga jednadžba veza između kutnih brzina i derivacija kutova.

Za zrakoplove s elisnim pogonom to su jednadžbe:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{u} &= \left( X_u^o - \frac{T^o \cos \alpha_T}{mu} \right) \Delta u + X_\alpha^o \Delta \alpha - g \cos \vartheta^o \Delta \vartheta \\ \Delta \dot{\alpha} &= \frac{Z_u^o - \frac{T^o \sin \alpha_T}{mu}}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \Delta u + \frac{Z_\alpha^o}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \Delta \alpha + \frac{u^o + Z_q^o}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \Delta q - \frac{g \sin \vartheta^o}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \Delta \vartheta + \frac{Z_{\delta_m}^o}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \Delta \delta_m \\ \Delta \dot{q} &= M_\alpha^o \frac{Z_u^o - \frac{T^o \sin \alpha_T}{mu}}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \Delta u + \left( M_\alpha^o + \frac{M_\dot{\alpha}^o Z_\alpha^o}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \right) \Delta \alpha - \frac{M_\dot{\alpha}^o g \sin \vartheta^o}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \Delta \vartheta + \\ &+ \left( M_q^o + M_\dot{\alpha}^o \frac{u^o + Z_q^o}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \right) \Delta q + \left( M_{\delta_m}^o + \frac{M_\dot{\alpha}^o Z_{\delta_m}^o}{u^o - Z_\dot{\alpha}^o} \right) \Delta \delta_m \\ \Delta \dot{\vartheta} &= \Delta q\end{aligned}\tag{13.1}$$

Gibanje opisano ovim jednadžbama nazivamo uzdužno gibanje. U njima se ne pojavljuju varijable skretanja ( $\Delta \beta$ ,  $\Delta r$ ) niti varijable valjanja ( $\Delta \phi$ ,  $\Delta p$ ). Mali poremećaj kuta valjanja  $\Delta \phi$  ne mijenja ništa u ovim jednadžbama, što drugim riječima znači da malo valjanje letjelice ne utječe na uzdužno gibanje. Gornje jednadžbe uzdužnog gibanje možemo napisati kao linearni sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{e},\tag{13.2}$$

u kome je vektor stanja

$$\Delta \mathbf{X} = [\Delta u \quad \Delta \alpha \quad \Delta q \quad \Delta \vartheta]^T,$$

a vektor upravljanja svodi se na skalar  $\Delta \mathbf{e} = \Delta \delta_m$ . Matrica  $\mathbf{A}$  sustava je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_u^0 - \frac{T^0 \cos \alpha_T}{mu^0} & X_\alpha^0 & 0 & -g \cos \vartheta^0 \\ \frac{Z_u^0 - \frac{T^0 \sin \alpha_T}{mu^0}}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} & \frac{Z_\alpha^0}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} & \frac{u^0 + Z_q^0}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} & -\frac{g \sin \vartheta^0}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} \\ M_\dot{\alpha}^0 \frac{Z_u^0 - \frac{T^0 \sin \alpha_T}{mu^0}}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} & M_\alpha^0 + \frac{M_\dot{\alpha}^0 Z_\alpha^0}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} & M_q^0 + \frac{M_\dot{\alpha}^0 (u^0 + Z_q^0)}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} & -\frac{M_\dot{\alpha}^0 g \sin \vartheta^0}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 13.3$$

a matrica  $\mathbf{B}$  je :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Z_{\delta_m}^0}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} \\ M_{\delta_m}^0 + \frac{M_\dot{\alpha}^0 Z_{\delta_m}^0}{u^0 - Z_\dot{\alpha}^0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 13.4$$

Podsjetimo se da smo ove jednadžbe dobili za pretpostavljeno stacionarno pravocrtno referentno gibanje, što znači da su matrice  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  konstantne.

Interesira nas kako se zrakoplov ponaša kada se u stacionarnom pravocrtnom letu promijenimo otklon kormila visine. Tražit ćemo odgovor letjelice na tri tipa promjene otklona:

- jedinični impuls otklona
- jedinični odskok otklona i
- harmonijski otklon

## 13.2 Odgovor letjelice na odskok otklona u vremenskom području

Rješenje linearnog sustava diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{e} \quad 13.5$$

poznato je. Ono je zbroj homogenog i partikularnog integrala:

$$\Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X}_h + \Delta \mathbf{X}_p \quad 13.6$$

### 13.2.1 Homogeno rješenje

Homogeni integrali  $\Delta \mathbf{X}_h$  rješenjr je homogenog sustava tj. kada nema pobude  $\Delta \mathbf{e} = 0$  :

$$\Delta \dot{\mathbf{X}}_h - \mathbf{A} \Delta \mathbf{X}_h = 0 \quad 13.7$$

Tražimo rješenje  $\Delta \mathbf{X}_h$  u obliku eksponencijalne funkcije

$$\Delta \mathbf{X}_h = \begin{bmatrix} \Delta u_h \\ \Delta \alpha_h \\ \Delta q_h \\ \Delta \vartheta_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{st} \\ e^{st} \\ e^{st} \\ e^{st} \end{bmatrix} \quad 13.8$$

isto za svaku komponentu. U tom slučaju je  $\Delta \dot{\mathbf{X}}_h = s \Delta \mathbf{X}_h$ . Ako takvo rješenje postoji onda ono mora zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu. Zamjenom u gornju jednadžbu dobivamo

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{J}) \Delta \mathbf{X}_h = 0 \quad 13.9$$

Ovo je sustav od četiri linearne jednadžbe u kojima su četiri nepoznanice:

$$\Delta \mathbf{X}_h = [\Delta u_h \quad \Delta \alpha_h \quad \Delta q_h \quad \Delta \vartheta_h]^T$$

S obzirom na to što nemamo slobodne članove na desnoj strani, determinanta sustava

$$D(s) = |\mathbf{A} - s\mathbf{J}|$$

mora biti jednaka nuli, jer bismo u protivnom imali trivijalno rješenje  $\Delta \mathbf{X}_h = 0$ :

$$D(s) = \begin{vmatrix} X_u^0 - \frac{T^0 \cos \alpha_T}{mu^0} - s & X_\alpha^0 & 0 & -g \cos \vartheta^0 \\ \frac{Z_u^0 - \frac{T^0 \sin \alpha_T}{mu^0}}{u^0 - Z_\alpha^0} & \frac{Z_\alpha^0}{u^0 - Z_\alpha^0} - s & \frac{u^0 + Z_q^0}{u^0 - Z_\alpha^0} & -\frac{g \sin \vartheta^0}{u^0 - Z_\alpha^0} \\ M_\alpha^0 \frac{Z_u^0 - \frac{T^0 \cos \alpha_T}{mu^0}}{u^0 - Z_\alpha^0} & M_\alpha^0 + \frac{M_\alpha^0 Z_\alpha^0}{u^0 - Z_\alpha^0} & M_q^0 + \frac{M_\alpha^0 (u^0 + Z_q^0)}{u^0 - Z_\alpha^0} - s & -\frac{M_\alpha^0 g \sin \vartheta^0}{u^0 - Z_\alpha^0} \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{vmatrix} \quad 13.10$$

Kad se razvije ta determinanta matrice  $\mathbf{A}$ , dobiva se tzv. *karakteristični polinom* četvrtog reda:

$$D(s) = s^4 + a s^3 + b s^2 + c s + d = 0 \quad 13.11$$

Taj karakteristični polinom ima 4 korijena  $s_1, s_2, s_3$  i  $s_4$  koje u MATLABu dobivamo pomoću naredbi

$$\mathbf{p} = \text{poly}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{s} = \text{root}(\mathbf{p})$$

Tim korijenima odgovaraju četiri moguća rješenja  $e^{s_1 t}$ ,  $e^{s_2 t}$ ,  $e^{s_3 t}$  i  $e^{s_4 t}$ . Zato što svaka varijabla ima opće rješenje u obliku linearne kombinacije tih četiri mogućih rješenja, dobivamo:

$$\Delta u_h = C_{u1}e^{s_1 t} + C_{u2}e^{s_2 t} + C_{u3}e^{s_3 t} + C_{u4}e^{s_4 t}$$

$$\Delta \alpha_h = C_{\alpha 1}e^{s_1 t} + C_{\alpha 2}e^{s_2 t} + C_{\alpha 3}e^{s_3 t} + C_{\alpha 4}e^{s_4 t}$$

$$\Delta q_h = C_{q1}e^{s_1 t} + C_{q2}e^{s_2 t} + C_{q3}e^{s_3 t} + C_{q4}e^{s_4 t}$$

$$\Delta \mathcal{G}_h = C_{g1}e^{s_1 t} + C_{g2}e^{s_2 t} + C_{g3}e^{s_3 t} + C_{g4}e^{s_4 t}$$

To možemo napisati matrično:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_h \\ \Delta \alpha_h \\ \Delta q_h \\ \Delta \mathcal{G}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{u1} & C_{u2} & C_{u3} & C_{u4} \\ C_{\alpha 1} & C_{\alpha 2} & C_{\alpha 3} & C_{\alpha 4} \\ C_{q1} & C_{q2} & C_{q3} & C_{q4} \\ C_{g1} & C_{g2} & C_{g3} & C_{g4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t} \\ e^{s_2 t} \\ e^{s_3 t} \\ e^{s_4 t} \end{bmatrix}$$

Uvedimo četverodimenzionalne konstante uz moguća rješenja:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_h \\ \Delta \alpha_h \\ \Delta q_h \\ \Delta \mathcal{G}_h \end{bmatrix} = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4] \begin{bmatrix} e^{s_1 t} \\ e^{s_2 t} \\ e^{s_3 t} \\ e^{s_4 t} \end{bmatrix}$$

ili

$$\Delta \mathbf{X}_h = \sum_{i=1}^4 C_i e^{s_i t} \quad 13.12$$

Konstante  $C_1, C_2, C_3, C_4$  imaju četiri dimenzije, koliko ima dimenzija i vektor stanja  $\Delta \mathbf{X}$ .

U općem slučaju korijeni  $s_1, s_2, s_3$  i  $s_4$  mogu biti realni (pozitivni i/ili negativni) i kompleksni korijeni. A priori jednadžbe uzdužnog gibanja zrakoplova imaju četiri kompleksna korijena. Budući da su koeficijenti karakterističnog polinoma realni brojevi, kompleksni korijeni moraju biti konjugirani. Znači da imamo dva para konjugiranih kompleksnih korijena. Te konjugirane korijene pišemo u obliku

$$-\delta_i \pm \omega_i i \quad 13.13$$

gde je  $i = 1, 2$ . Opće rješenje svake varijable možemo napisati u obliku gušene trigonometrijske funkcije. Na primjer za poremećaj  $\Delta u_h$ , koje mora biti realno, možemo opći oblik transformirati kako slijedi:

$$\begin{aligned} \Delta u_h &= C_{1u} e^{(-\delta_1 + i\omega_1)t} + C_{2u} e^{(-\delta_1 - i\omega_1)t} + C_{3u} e^{(-\delta_2 + i\omega_2)t} + C_{4u} e^{(-\delta_2 - i\omega_2)t} \\ &= e^{-\delta_1 t} (C_{1u} e^{i\omega_1 t} + C_{2u} e^{-i\omega_1 t}) + e^{-\delta_2 t} (C_{3u} e^{i\omega_2 t} + C_{4u} e^{-i\omega_2 t}) \\ \Delta u_h &= e^{-\delta_1 t} [C_{1u} (\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) + C_{2u} (\cos \omega_1 t - i \sin \omega_1 t)] + \\ &\quad + e^{-\delta_2 t} [C_{3u} (\cos \omega_2 t + i \sin \omega_2 t) + C_{4u} (\cos \omega_2 t - i \sin \omega_2 t)] \end{aligned}$$

ili

$$\Delta u_h = e^{-\delta_1 t} [(C_{1u} + C_{2u}) \cos \omega_1 t + i(C_{1u} - C_{2u}) \sin \omega_1 t] + \\ + e^{-\delta_2 t} [(C_{3u} + C_{4u}) \cos \omega_2 t + i(C_{3u} - C_{4u}) \sin \omega_2 t]$$

Promatrajmo prvi član na desnoj strani

$$e^{-\delta_1 t} [(C_{1u} + C_{2u}) \cos \omega_1 t + i(C_{1u} - C_{2u}) \sin \omega_1 t]$$

Da bi on bio realan, mora biti  $C_{1u} + C_{2u}$  realan broj  $C'$ , a  $C_{1u} - C_{2u}$  mora biti imaginaran broj  $iC''$ . S obzirom na jednakost

$$e^{-\delta_1 t} (C' \sin \omega_1 t + C'' \cos \omega_1 t) = e^{-\delta_1 t} A_{01} \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

gdje su

$$A_{01} = \sqrt{C'^2 + C''^2} \\ \varphi_1 = \arctan \frac{C''}{C'}$$

može se poremećaj uzdužne brzine staviti u oblik:

$$\Delta u = e^{-\delta_1 t} A_{01} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + e^{-\delta_2 t} A_{02} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad 13.14$$

Tako se mogu napisati i poremećaji  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta q$ ,  $\Delta \theta$ . Prema tome homogeno rješenje, za svaku komponentu poremećaja, je zbroj dva gušena harmonijska moda. Realni dio konjugirano kompleksnih korijena  $-\delta_i$  mora biti negativan, tj.  $\delta_i > 0$  da bi mod bio gušen. To  $\delta_i$  naziva se koeficijent gušenja (*damping coefficient*). Imaginarni dio  $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$  predstavlja kružnu

učestalost.  $T_i$  je perioda tog moda, a  $\frac{1}{T_i} = f_i$  je učestalost moda.

Osim ovih parametara  $\delta_i$  i  $\omega_i$  upotrebljavaju se i od njih izvedeni parametri.

*Vremenska konstanta* predstavlja recipročnu vrijednost konstante gušenja

$$\tau = \frac{1}{\delta}, \quad 13.15$$

a to znači kada je vrijeme gibanja  $t$  jednako vremenskoj konstanti, amplituda se smanjila  $e$  puta. Sa  $\tau_{1/2}$  označava se vrijeme za koje se amplituda moda prepolovi. To vrijeme dobivamo iz jednadžbe

$$e^{-\delta \tau_{1/2}} = \frac{1}{2},$$

odakle je

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\delta}. \quad 13.16$$

U slučaju ne gušenog moda koristi se vrijeme  $\tau_2$  za koje se amplituda moda udvostruči:

$$e^{-\delta\tau_2} = 2$$

$$\tau_2 = \frac{\ln 2}{-\delta} \quad 13.17$$

Konačno za ocjenu moda upotrebljava se parametar *gušenje*. Da bismo objasnili taj parametar, zamislimo sustav koji ima korijene jednog moda  $s_{1,2} = -\delta \pm i\omega$ . Karakteristična jednačba tog sustava je

$$s^2 - (s_1 + s_2) \cdot s + s_1 s_2 = 0,$$

ili

$$s^2 + 2\delta \cdot s + (\delta^2 + \omega^2) = 0.$$

Ako uvedemo novu varijablu  $\sigma = s / \sqrt{\delta^2 + \omega^2}$ , dobit ćemo novu jednačbu:

$$\sigma^2 + 2 \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} \sigma + 1 = 0$$

Tu jednačbu možemo napisati u općem obliku

$$\sigma^2 + 2\zeta \sigma + 1 = 0$$

u kojoj imamo samo jedan parametar koji se naziva *gušenje* moda.

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} \quad 13.18$$

Veličina

$$\omega_n = \sqrt{\delta^2 + \omega^2} \quad 13.19$$

naziva se *prirodna učestalost* i koristi se za ocjenu kvalitete upravljivosti objekta.

### 13.2.2 Partikularni integral

Partikularni integrali se mogu naći na temelju pretpostavke da ih tražimo u obliku konstanta.

Ako su oni konstantni, onda je  $\Delta \dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$ , pa je

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{X}_p + \mathbf{B} \Delta \mathbf{e}$$

$$\Delta \mathbf{X}_p = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{e}.$$

Uvest ćemo pojam *aerodinamičko pojačanje*:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad 13.20$$

To je matrica koja ima onoliko redaka koliko ima varijabli vektor stanja, a onoliko stupaca koliko ima dimenzija vektor upravljanja. S tom veličinom je partikularni integral :

$$\Delta \mathbf{X}_p = \mathbf{K} \cdot \Delta \delta_m \quad 13.21$$

Taj partikularni integral vektor stanja je konstantan vektor i predstavljanja razliku od početnog ravnotežnog stanja do novog ravnotežnog stanja.

### 13.2.3 Opće rješenje

Konačno rješenje je zbroj homogenog i partikularnog integrala. Svaka varijabla stanja (ima ih četiri) ima dva moda sa po dvije konstante. Rješenje nehomogenog sustava diferencijalnih jednadžbi uzdužnog gibanja je :

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \alpha \\ \Delta q \\ \Delta \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\delta_1 t} A_{u1} \sin(\omega_1 t + \varphi_{u1}) + e^{-\delta_2 t} A_{u2} \sin(\omega_2 t + \varphi_{u2}) \\ e^{-\delta_1 t} A_{\alpha 1} \sin(\omega_1 t + \varphi_{\alpha 1}) + e^{-\delta_2 t} A_{\alpha 2} \sin(\omega_2 t + \varphi_{\alpha 2}) \\ e^{-\delta_1 t} A_{q1} \sin(\omega_1 t + \varphi_{q1}) + e^{-\delta_2 t} A_{q2} \sin(\omega_2 t + \varphi_{q2}) \\ e^{-\delta_1 t} A_{\vartheta 1} \sin(\omega_1 t + \varphi_{\vartheta 1}) + e^{-\delta_2 t} A_{\vartheta 2} \sin(\omega_2 t + \varphi_{\vartheta 2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_u \\ K_\alpha \\ K_q \\ K_\vartheta \end{bmatrix} \Delta \delta_m, \quad 13.22$$

gdje su  $A_{x_i}$  amplitude moda  $i = 1, 2$  poremećaja  $x = \Delta u, \Delta \alpha, \Delta q$  i  $\Delta \vartheta$ , a  $\varphi_{x_i}$  njihovi fazni pomaci. Konstanta  $A_{x_i}$  ima  $4 \cdot 2 = 8$  i isto toliko faznih pomaka. Ukupno to je 16 konstanti.

Opće rješenje možemo napisati i u obliku koji nam je pogodniji za usporedbu s Laplaceovom analizom:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \alpha \\ \Delta q \\ \Delta \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{u1} & C_{u2} & C_{u3} & C_{u4} \\ C_{\alpha 1} & C_{\alpha 2} & C_{\alpha 3} & C_{\alpha 4} \\ C_{q1} & C_{q2} & C_{q3} & C_{q4} \\ C_{\vartheta 1} & C_{\vartheta 2} & C_{\vartheta 3} & C_{\vartheta 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t} \\ e^{s_2 t} \\ e^{s_3 t} \\ e^{s_4 t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_u \\ K_\alpha \\ K_q \\ K_\vartheta \end{bmatrix} \Delta \delta_m$$

Kraće napisano to je:

$$\Delta \mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{C}_i e^{s_i t} + \mathbf{K} \Delta \delta_m, \quad 13.23$$

u kome su

$$[\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_4] = \begin{bmatrix} C_{u1} & C_{u2} & C_{u3} & C_{u4} \\ C_{\alpha 1} & C_{\alpha 2} & C_{\alpha 3} & C_{\alpha 4} \\ C_{q1} & C_{q2} & C_{q3} & C_{q4} \\ C_{\vartheta 1} & C_{\vartheta 2} & C_{\vartheta 3} & C_{\vartheta 4} \end{bmatrix}$$

Ukupno imamo šesnaest konstanta. Veličine tih konstanti najlakše ćemo odrediti, kao i druga svojstva uzdužnog gibanja, pomoću Laplaceove transformacije.

### 13.2.4 Primjer

Za laki mali putnički zrakoplov treba odrediti korijene uzdužnog gibanja zrakoplova i aerodinamičko pojačanje kada leti horizontalno na visini 2000 m u režimu za maksimalni dolet koji smo odredili u primjeru 8.1.7, primjer 2.

$$V = 53$$

$$C_L = 0.499$$

Aerodinamički proračun tog zrakoplova urađen je u petom poglavlju, gdje smo dobili koeficijente normalne sile i momenta propinjanja u stacionarnom režimu kada  $\dot{\alpha} = q = 0$ . Ti su rezultati ovisili o postavim kutovima krila i repa, kao i o položaju središta mase. Za postavne kutove  $i_w = 1^\circ$  i  $i_h = -1^\circ$  te za središte mase na udaljenosti  $\ell_m = 0.233 m$  od ravnine elise ili  $\bar{h}_m = 0.137$  od aerodinamičkog ishodišta dobili smo koeficijente:

$$C_N = 0.247 + 4.72\alpha + 0.216 \cdot K_f \delta_m$$

$$C_m = -0.001 - 0.835\alpha - 0.577 \cdot K_f \delta$$

Na kraju aerodinamičkog proračuna malog zrakoplova u poglavlju 3.9.7 urađen je i proračun nestacionarnih koeficijenata za isti položaj središta mase  $\bar{h}_m = 0.137$ :

$$C_{Z\dot{\alpha}} = -0.52 \quad C_{Zq} = -1.26$$

$$C_{m\dot{\alpha}} = -1.34 \quad C_{mq} = -3.25$$

Masene karakteristike zrakoplova su:

$$m = 1088. \text{ kg} \quad I_Y = 1693 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### Rješenje

Ako zrakoplov leti horizontalno onda je  $\vartheta = \gamma + \alpha = \alpha_T$  jer je  $\gamma = 0$ , a motor je tako postavljen da je u tom režimu leta pogonska sila u pravcu brzine leta. To znači da je u referentnom letu (vidi primjer 8.1.7.2) potreban koeficijent uzgona  $C_L = 0.499$ , a brzina leta  $V = 53.1 \text{ m/s}$ .

Iz gornjih jednadžba za aerodinamičke koeficijente normalne sile i momenta propinjanja, vidimo da su gradijenti po napadnom kutu:

$$C_{Z\alpha} = -4.72$$

$$C_{m\alpha} = -0.835$$

U ravnotežnom letu je  $C_m = 0$ , a za željeni koeficijent uzgona gornje jednadžbe daju nam ravnotežni napadni kut i kut otklona za koji se on ostvaruje:



$$\begin{aligned} 0.499 &= 0.247 + 4.72\alpha_{rav} + 0.216 \cdot K_f \delta_m \\ 0 &= -0.001 - 0.835\alpha_{rav} - 0.577 \cdot K_f \delta \end{aligned}$$

Dobivamo traženi ravnotežni napadni kut

$$\alpha_{rav} = 0.0573 = 3.3^\circ$$

koji se ostvaruje s odklonom kormila visine  $\delta_m = -0.0846 = -4.8^\circ$ . Taj odklon je u linearnom području te je  $K_f = 1$ . Pretpostavimo da je postavni kut motora  $\alpha_T = \alpha_{rav} = 3.3^\circ$ , onda je u referentnom režimu  $\vartheta^0 = \alpha_T = 3.3^\circ$ . Pogonska sila jednaka je otporu. Prema odjeljku 5.2.6  $C_{D0} = 0.0259$ , a otpor pri ravnotežnom napadnom kutu bit će

$$C_D = 2 \cdot C_{D0} = 2 \cdot 0.0259 = 0.0518$$

$$T = \frac{\rho V^2}{2} S_{ref} C_D^0 = \frac{1.007 \cdot 53.1^2}{2} 15.09 \cdot 0.0518 = 1110 \text{ N}$$

Da bismo odredili potrebne derivative aerodinamičkih koeficijenata u koordinatnom sustavu letjelice, kao npr.  $C_{X\alpha}$ , korist ćemo se vezama između aerodinamičkih koeficijenata koje smo izveli u odjeljku 2.1.3. U ovom slučaju nema bočnog gibanja pa su veze između aerodinamičkih koeficijenata u uzdužnom gibanju:

$$C_X = -C_D + C_L \alpha$$

U referentnom režimu je

$$C_X^0 = -C_D^0 + C_L^0 \alpha^0 = -0.0518 + 0.499 \cdot 0.0573 = -0.0232$$

Ovisnost aksijalne sile o napadnom kutu može se dobiti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} C_X &= -C_D + C_L \alpha \\ &= -C_{D0} - KC_L^2 + C_L \alpha \end{aligned}$$

Derivacijom po napadnom kutu dobivamo:

$$C_{X\alpha}^0 = -2KC_L^0 C_{L\alpha}^0 + C_L^0 + \alpha^0 C_{L\alpha}^0$$

Za izabranom referenti let dobivamo:

$$C_{X\alpha}^0 = -2 \cdot 0.104 \cdot 0.499 \cdot 4.73 + 0.499 + 0.0573 \cdot 4.73 = 0.279$$

Napravljen je program u MATLAB-u pod imenom **ABROOT.m** koji se nalazi na CDu u direktoriju *Dinamicka\stabilnost\uzduzna*. S njim su dobivene matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.0364 & 5.4945 & 0 & -9.7937 \\ -0.0069 & -1.7435 & 0.9790 & -0.0106 \\ 0.0067 & -16.0762 & -3.1353 & 0.0098 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0796 \\ -12.3407 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Korijeni su karakterističnog polinoma matrice  $\mathbf{A}$  :

$$s_1 = -2.4469 + 3.9067i$$

$$s_2 = -2.4469 - 3.9067i$$

$$s_3 = -0.0108 + 0.2376i$$

$$s_4 = -0.0108 - 0.2376i$$

Prema ovim rezultatima određene su periode :

- kratka perioda  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{3.9067} = 1.61 \text{ s}$ ,

- duga perioda  $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{0.2376} = 26.4 \text{ s}$

### 13.3 Prijenosne funkcije (open loop transfer function)

Izvedimo Laplaceovu transformaciju lineariziranih jednadžbi:

$$\frac{d\Delta\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{B}\Delta\delta_m(t) \quad 13.24$$

Tom transformacijom dobivamo (pod uvjetom da su početni poremećaji vektora stanja jednaki nuli, što je zadovoljeno):

$$s\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\Delta\delta_m(s),$$

odakle je

$$(s\mathbf{J} - \mathbf{A}) \cdot \Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{B} \cdot \Delta\delta_m(s), \quad 13.25$$

ili

$$\frac{\Delta\mathbf{X}(s)}{\Delta\delta_m} = (s\mathbf{J} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}. \quad 13.26$$

Odnos Laplaceove transformacije vektora stanja poremećaja prema Laplaceovoj transformaciji otklona kormila visine nazivamo *prijenosna funkcija po otklonu kormila visine*. Taj vektor ima četiri dimenzije

$$\mathbf{G}_{\delta_m}(s) = [G_{u\delta_m} \quad G_{\alpha\delta_m} \quad G_{q\delta_m} \quad G_{g\delta_m}]^T$$

Ako gornju jednadžbu 13.25 napišemo u obliku

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{J}) \cdot \mathbf{G}_{\delta_m} = -\mathbf{B}, \quad 13.27$$

dobivamo linearni sustav algebarskih jednadžbi po prijenosnim funkcijama. Rješenje toga sustava algebarskih jednadžbi daje nam četiri komponente vektora *prijenosne funkcije* :

$$\mathbf{G}_{\delta_m} = \begin{bmatrix} G_{u\delta_m} & G_{\alpha\delta_m} & G_{q\delta_m} & G_{g\delta_m} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{N_u(s)}{D(s)} & \frac{N_\alpha(s)}{D(s)} & \frac{N_q(s)}{D(s)} & \frac{N_g(s)}{D(s)} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{N}(s)}{D(s)}$$

$D$  je determinanta  $|\mathbf{A} - s\mathbf{J}|$ , tj. karakteristični polinom matrice  $\mathbf{A}$ , a polinomi  $\mathbf{N}(s) = [N_u(s) \ N_\alpha(s) \ N_q(s) \ N_g(s)]^T$  determinante su koje dobivamo kada u determinanti  $|\mathbf{A} - s\mathbf{J}|$  zamijenimo stupac uz varijablu sa stupcem matrice  $-\mathbf{B}$ . Kako u stupcu koji zamjenjujemo ima  $s$ , a u stupcu koji ga zamjenjuje  $-\mathbf{B}$  nema  $s$ , nove determinante  $\mathbf{N}(s)$  bit će polinomi po  $s$  za jedan stupanj niži od polinoma  $D(s)$ .

Pomoću prijenosne funkcije možemo Laplaceovu transformaciju poremećaja prikazati kao produkt prijenosne funkcije i Laplaceove transformacije otklona kormila visine:

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_{\delta_m}(s) \cdot \Delta\delta_m(s) \quad 13.28$$

Primjerice poremećaj napadnog kuta bit će:

$$\Delta\alpha(s) = G_{\alpha\delta}(s) \cdot \Delta\delta_m(s).$$

Isto tako bit će Laplaceova transformacija poremećaja svake druge varijable jednaka produktu njene prijenosne funkcije i Laplaceove transformacije otklona kormila visine.

### 13.4 Odgovor na jedinični impuls (*impulsive admittance*)

Promatrajmo posebni slučaj otklona. Ako u trenutku  $t = 0$  zadamo otklon  $\Delta\delta_m(t)$  koji ima jedinični impuls, nije važno kakva je to funkcija od vremena, samo je potrebno da

$$\int_0^{\Delta t} \Delta\delta_m(t) \cdot dt = 1,$$

s tim da  $\Delta t$  bude malo u odnosu na periodu kratkoperiodičnog moda (matematički je točnije reći da ovaj integral teži k jedinici kada  $\Delta t$  teži k nuli). Laplaceova transformacija jediničnog impulsa jednaka je jedinici

$$\Delta\delta_m(s) = 1,$$

pa je Laplaceova transformacija izlaza

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_{\delta_m}(s) \cdot \Delta\delta_m(s) = \mathbf{G}_{\delta_m}(s) \quad 13.29$$

jednaka prijenosnoj funkciji. Kada na ulazu imamo jedinični impuls otklona kormila visine, izlaze veličine u realnom vremenu  $[\Delta u(t) \ \Delta\alpha(t) \ \Delta q(t) \ \Delta\theta(t)]^T$  označimo sa

$$\mathbf{h}(t) = [h_u(t) \ h_\alpha(t) \ h_q(t) \ h_g(t)]^T.$$

Ti izlazi bit će jednaki inverznim Laplaceovim transformacijama od prijenosnih funkcija

$$\mathbf{h}(t) = L^{-1}[\mathbf{G}_{\delta_m}(s)], \quad 13.30$$

a ta inverzna transformacija može se dobiti primjenom *Heavisideova teorema razvoja*.

Imajući na umu da je  $\mathbf{G}_{\delta_m}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{D(s)}$ , dobit ćemo

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(t) = L^{-1}\left(\frac{\mathbf{N}(s)}{D(s)}\right) &= \frac{\mathbf{N}(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} e^{s_1 t} + \frac{\mathbf{N}(s_2)}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} e^{s_2 t} + \\ &+ \frac{\mathbf{N}(s_3)}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)} e^{s_3 t} + \frac{\mathbf{N}(s_4)}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)} e^{s_4 t}. \end{aligned}$$

13.31

Ovu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}_1 e^{s_1 t} + \mathbf{C}_2 e^{s_2 t} + \mathbf{C}_3 e^{s_3 t} + \mathbf{C}_4 e^{s_4 t}$$

Primjerice vektor konstanta  $\mathbf{C}_1$  uz  $e^{s_1 t}$  ima komponente

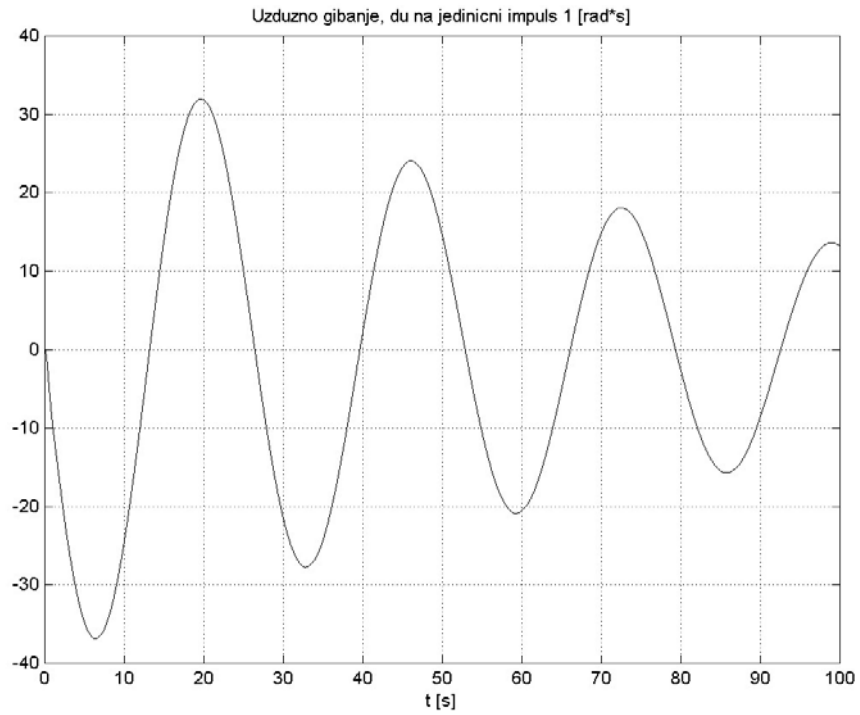
$$\begin{aligned} C_{u1} &= \frac{N_u(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} \\ C_{\alpha 1} &= \frac{N_\alpha(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} \\ C_{q1} &= \frac{N_q(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} \\ C_{g4} &= \frac{N_i(s_4)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} \end{aligned}$$

Tako možemo dobiti poremećaje svih varijabli stanja uzdužnog gibanja za slučaj kada zadamo jedinični impulsni otklon kormila visine.

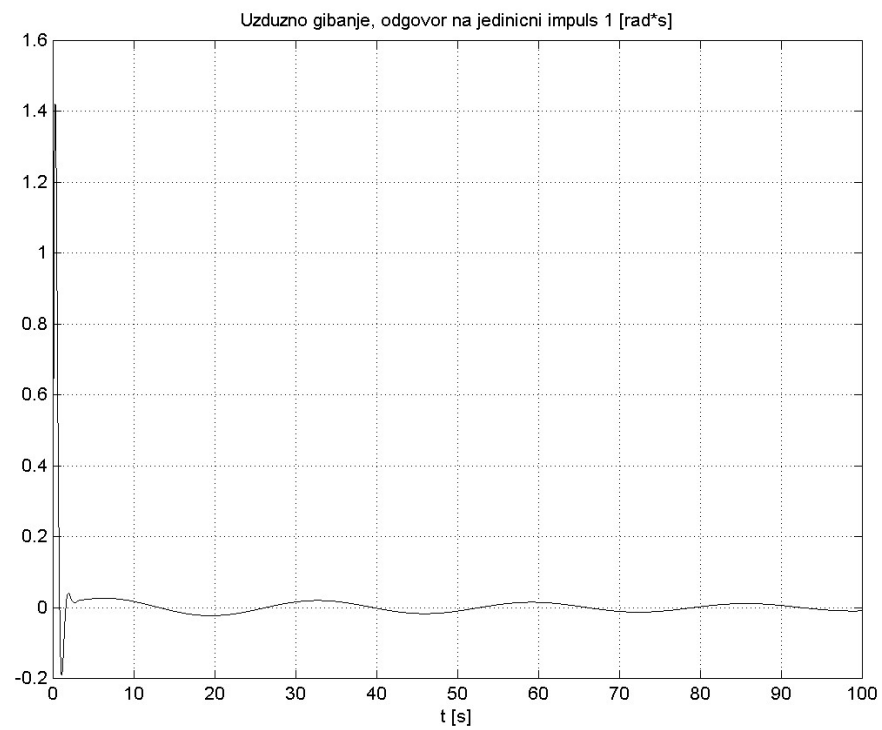
### 13.4.1 Primjer

Treba izračunati i nacrtati za zrakoplov iz prethodnog primjera odgovor u uzdužnom gibanju na jedinični impulsni otklon kormila visine.

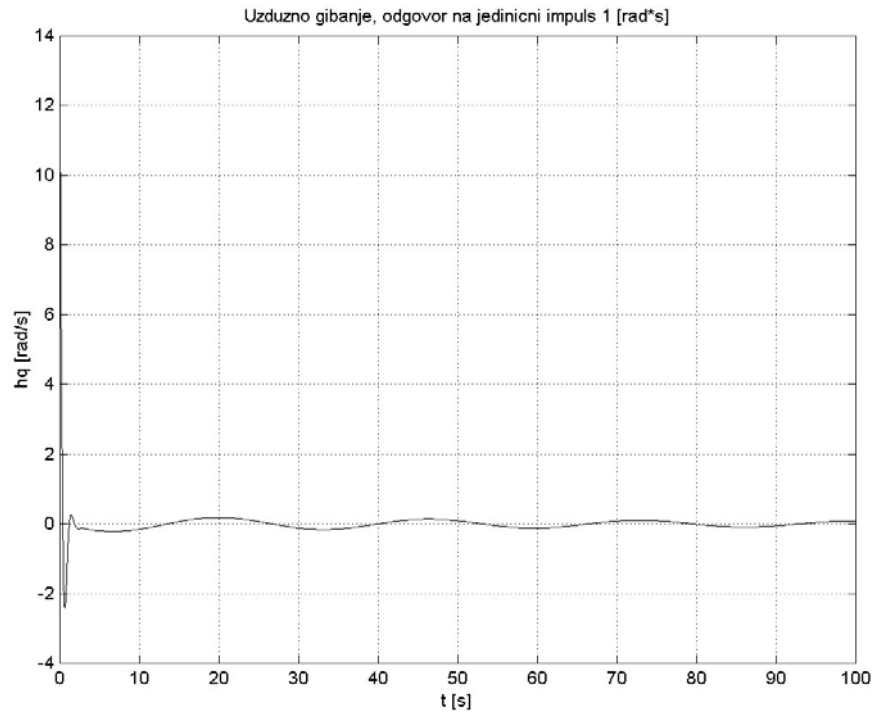
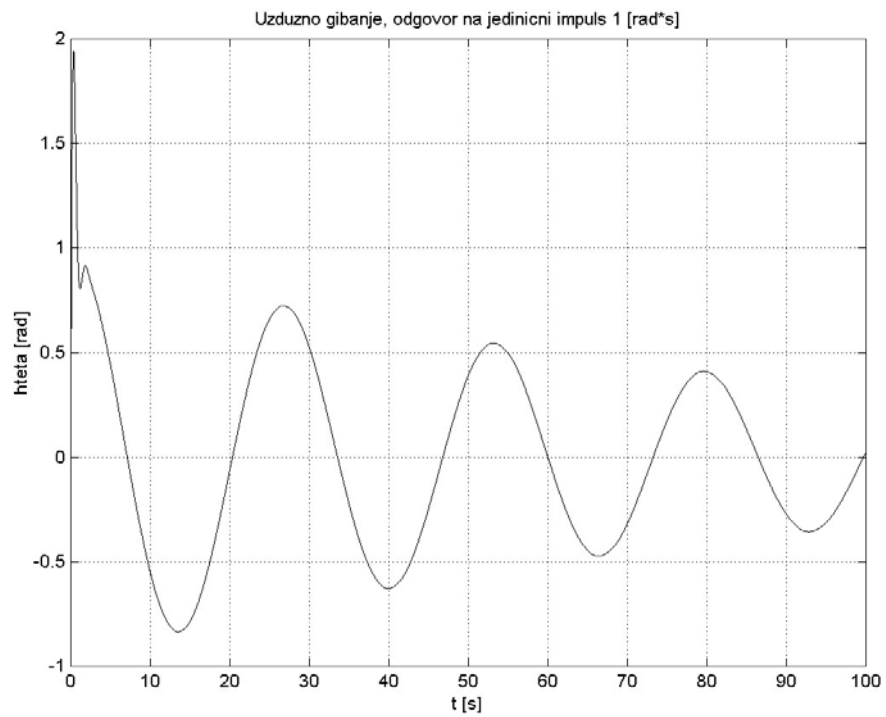
Zadatak je riješen u MATLABu. Napravljen je program pod imenom *Impuls.m*, koji se nalazi na CD-u u direktoriju "*Dinamička stabilnost\Uzduzna*". Primijenili smo ga na matrice **A** i **B** koje smo izračunali u prethodnom promjeru za mali zrakoplov. Iz dobivenih rezultata na slikama 13-1, 13-2, 13-3 i 13-4 vidimo da su za poremećaje gibanja središta mase  $\Delta u$  i  $\Delta \gamma = \Delta \vartheta - \Delta \alpha$  dominantni dugoperiodični modovi, dok su za gibanje oko središta mase  $\Delta \alpha$  dominantni kratkoperiodični modovi.



Slika 13-1  $\Delta u(t)$  kao odgovor na jedinični impuls kormila visine



Slika 13-2  $\Delta \alpha(t)$  kao odgovor na jedinični impuls kormila visine

Slika 13-3  $\Delta q(t)$  kao odgovor na jedinični impuls kormila visineSlika 13-4  $\Delta \vartheta(t)$  kao odgovor na jedinični impuls kormila visine

### 13.5 Odgovor na jedinični odskok (*indicial admittance*)

Ako je u realnom vremenu otklon kormila visine jedinični odskok

$$\Delta\delta_m = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}, \quad 13.32$$

onda je njegova Laplaceova transformacija ulaza

$$\Delta\delta_m(s) = \frac{1}{s}. \quad 13.33$$

Izlaz iz linearnog sustava:

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_{\delta_m}(s) \cdot \Delta\delta_m(s)$$

Kako je prijenosna funkcija poremećaja po otklonu kormila visine

$$\mathbf{G}_{\delta_m}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{D(s)}, \quad 13.34$$

bit će izlaz u realnom vremenu za poremećaj:

$$\Delta\mathbf{X}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{N}(s)}{s \cdot D(s)} \right\} \quad 13.35$$

$s \cdot D(s)$  je polinom petog reda koji ima četiri korijena karakteristične jednadžbe i peti korijen jednak nuli:  $s_1, s_2, s_3, s_4$  i  $s_5 = 0$ , a  $\mathbf{N}(s) = [N_u(s) \ N_\alpha(s) \ N_q(s) \ N_g(s)]^T$  su poznati polinomi trećega reda. Primjenom *Heavisideova* teorema bit će

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{X} = & \frac{\mathbf{N}(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)s_1} e^{s_1 t} + \frac{\mathbf{N}(s_2)}{(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} + \\ & + \frac{\mathbf{N}(s_3)}{(s_3 - s_4)s_3(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} e^{s_3 t} + \frac{\mathbf{N}(s_4)}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)s_4} e^{s_4 t} + \frac{\mathbf{N}(0)}{s_1 s_2 s_3 s_4} \end{aligned} \quad 13.36$$

Usporedimo ovo rješenje s onim koje smo dobili kao zbroj homogenog i partikularnog rješenja kada je otklon kormila visine na jedinični odskok

$$\Delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{C}_i e^{s_i t} + \mathbf{K} \quad 13.37$$

Izjednačavanjem ova dva rješenja dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \frac{\mathbf{N}(s_1)}{s_1(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} \\ \mathbf{C}_2 &= \frac{\mathbf{N}(s_2)}{s_2(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} \end{aligned}$$

$$C_3 = \frac{N(s_3)}{s_3(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)} \quad 13.38$$

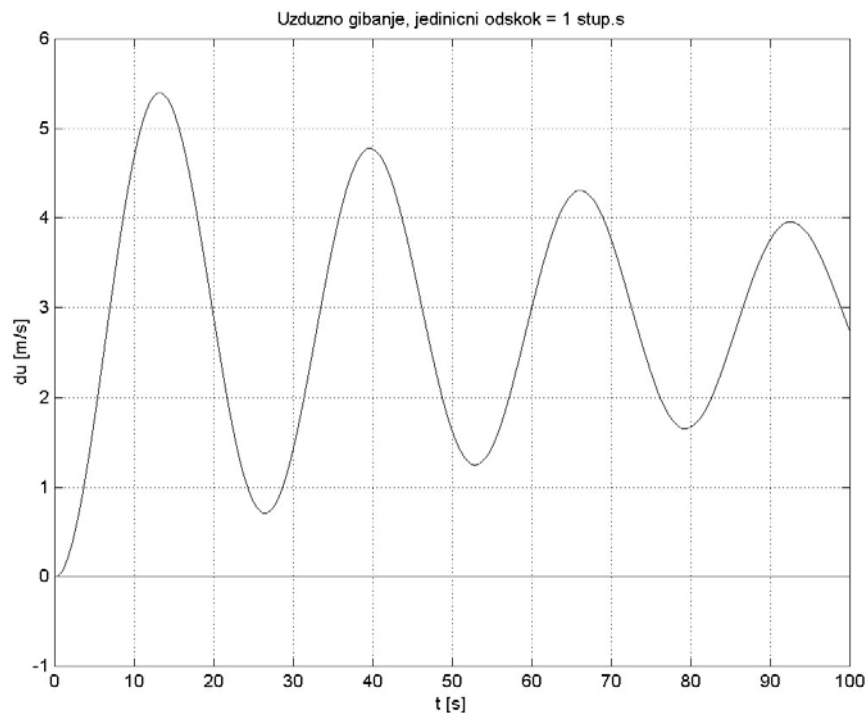
$$C_4 = \frac{N(s_4)}{s_4(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)}$$

$$K = \frac{N(0)}{s_1 s_2 s_3 s_4}$$

### 13.5.1 Primjer

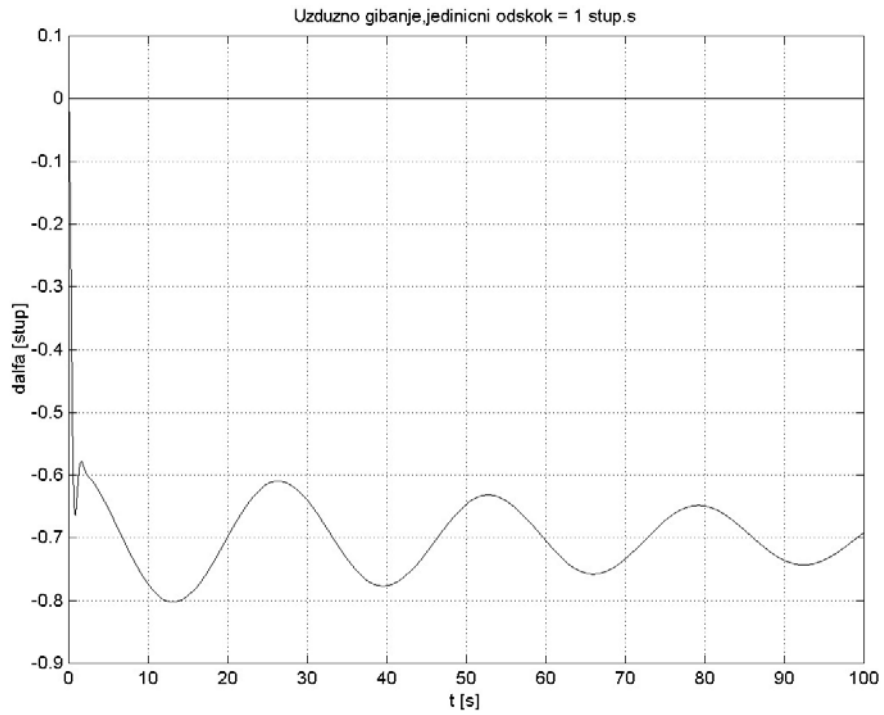
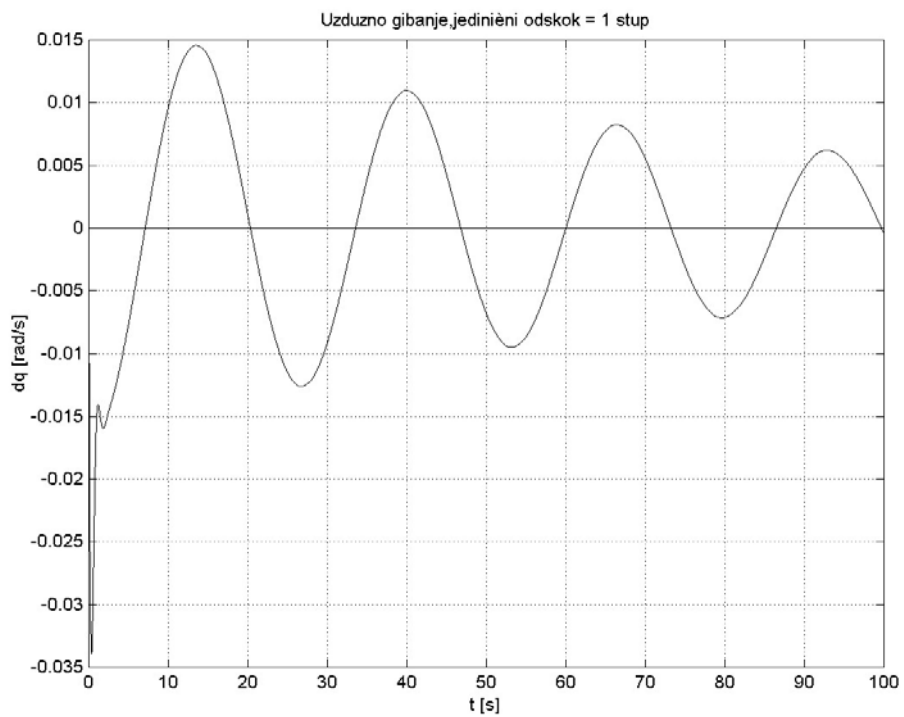
Treba odrediti izlaz poremećaja varijabli stanja uzdužnog gibanja ako je ulaz jedinična odskočna funkcija otklona kormila visine za laki zrakoplov kao iz prethodnog primjera.

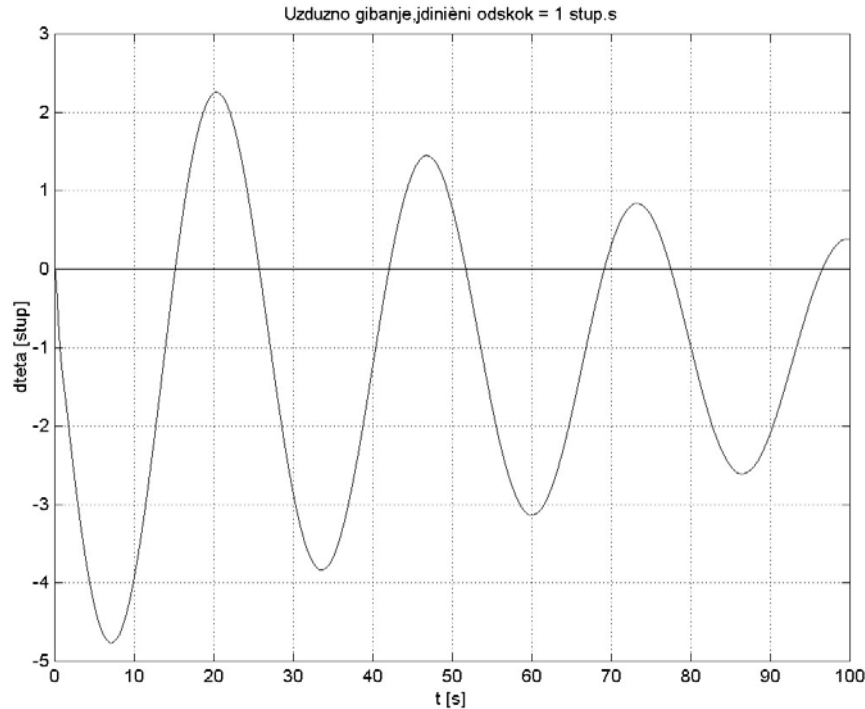
Program je napisan u MATLAB-u pod imenom *Odskok.m*, a nalazi se na disketi u direktoriju "*Dinamička stabilnost/Uzduzna*". Isti rezultati mogu se dobiti u MATLAB-u pomoću rutine LSIM. To je sistemski program koji obavlja numeričku integraciju diferencijalnih jednadžbi  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{e}$ . Program koji poziva tu rutinu naziva se *Odsk.m*. Nalazi se također na CD-u u istom direktoriju. Dobiveni dijagrami nacrtani su na slikama 13-5, 13-6, 13-7 i 13-8.



Slika 13-5  $\Delta u(t)$  na jedinični odskok kormila visine



Slika 13-6  $\Delta\alpha(t)$  na jedinični odskok kormila visineSlika 13-7  $\Delta q(t)$  na jedinični odskok kormila visine

Slika 13-8  $\Delta\vartheta(t)$  na jedinični odskok kormila visine

Prvo uočimo da su poslije nekoliko dugih perioda poremećaji  $\Delta u$ ,  $\Delta\alpha$  i  $\Delta\vartheta$  konstantni i različiti od nule, dok je poremećaj  $\Delta q = 0$ . To znači da je letjelica prešla u drugi ravnotežni let. Ta konstantna vrijednost na primjer za  $\Delta\alpha$  predstavlja razliku između prvobitnog ravnotežnog leta i ovog drugog u kojem se nalazi poslije smirivanja.

### 13.6 Odgovor na harmonijsku pobudu

Posebno je zanimljiv odgovor letjelice ako je ulaz sinusna funkcija zato što se proizvoljan otklon u funkciji vremena može uvijek spektralnom analizom prikazati kao zbroj sinusnih funkcija različite učestalosti i amplitude.

Promatramo odgovor letjelice na sinusnu promjenu otklona kormila visine konstantne učestalosti i jedinične amplitude. Pri tome ne promatramo početak gibanja letjelice već ustaljeno uzdužno gibanje, jer je početni dio opterećen prijelaznim procesom koji se bolje izučava odskočnim ulazom. Pretpostavljamo da je uzdužno gibanje stabilno, tj. da su realni dijelovi korijena negativni.

Neka je ulaz

$$\Delta\delta_m(t) = e^{i\omega t} \quad 13.39$$

Laplaceova transformacija ovog ulaza je

$$\Delta\delta_m(s) = \frac{1}{s - i\omega}, \quad 13.40$$

pa je odgovor letjelice

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \frac{\mathbf{G}(s)}{s - i\omega}. \quad 13.41$$

Potražimo odgovor u realnom vremenu, tj. inverznu transformaciju ovog odgovora letjelice.

Kako je  $\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{D(s)}$  bit će

$$\Delta\mathbf{X}(t) = L^{-1} \left[ \frac{\mathbf{N}(s)}{(s - i\omega) \cdot D(s)} \right]. \quad 13.42$$

Polinom  $(s - i\omega)D(s)$  petoga je reda i ima četiri korijena  $s_1, s_2, s_3, s_4$  ista kao i karakteristični polinom  $D(s)$  i još jedan korijen koji je imaginaran  $s_5 = i\omega$ . Zato primjenom *Heavisideova* teorema razvoja dobivamo:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{X}(t) = & \frac{\mathbf{N}(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_1 - i\omega)} e^{s_1 t} + \frac{\mathbf{N}(s_2)}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)(s_2 - i\omega)} e^{s_2 t} + \\ & + \frac{\mathbf{N}(s_3)}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)(s_3 - i\omega)} e^{s_3 t} + \frac{\mathbf{N}(s_4)}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)(s_4 - i\omega)} e^{s_4 t} + \\ & + \frac{\mathbf{N}(i\omega)}{(i\omega - s_1)(i\omega - s_2)(i\omega - s_3)(i\omega - s_4)} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad 13.43$$

Kako smo uvjetovali da se radi o stabilnoj letjelici, realni dijelovi korijena  $s_1, s_2, s_3, s_4$  moraju biti negativni pa prva četiri člana na desnoj strani iščezavaju poslije određenog vremena pa na desnoj strani ostaje samo peti član koji predstavlja ustaljeni izlaz, dok prva četiri predstavljaju prijelazni proces koji nas ovdje ne zanima.

$$\Delta\mathbf{X}(t) = \frac{\mathbf{N}(i\omega)}{(i\omega - s_1)(i\omega - s_2)(i\omega - s_3)(i\omega - s_4)} e^{i\omega t} \quad 13.44$$

Kompleksna amplituda može se prikazati u obliku trigonometrijskog broja. Npr. za napadni kut bit će

$$\Delta\alpha(t) = K(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)} \quad 13.45$$

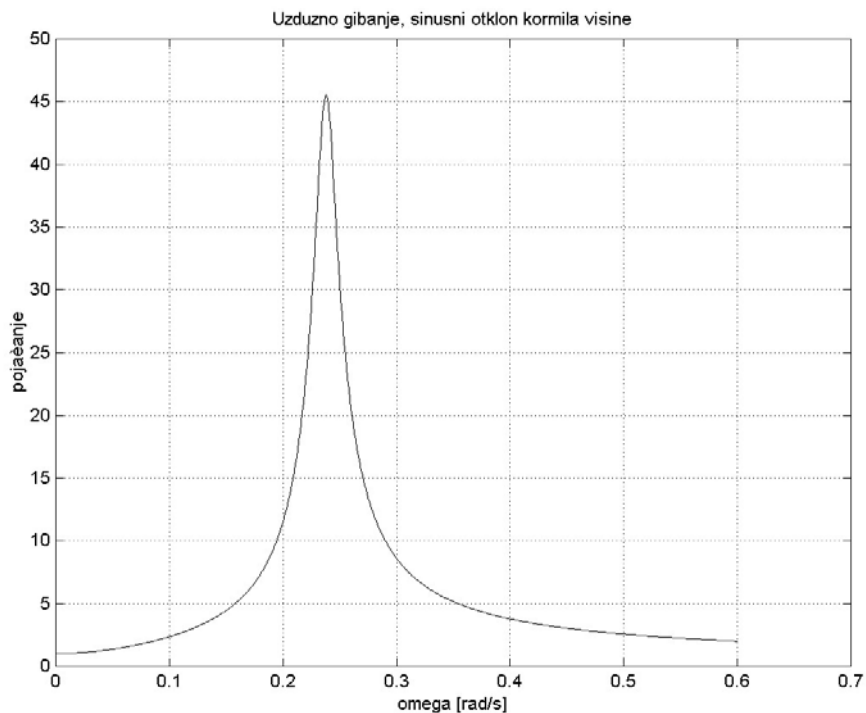
gdje je

$$\frac{N_\alpha(i\omega)}{(i\omega - s_1)(i\omega - s_2)(i\omega - s_3)(i\omega - s_4)} = K(\omega) e^{i\varphi(\omega)}.$$

To znači da je ustaljeni izlaz pri harmonijskoj pobudi također harmonijska funkcija, ali koja ima amplitudu ovisnu o veličini periode pobude, a periodičnost ima vremenski pomak unaprijed za kut  $\varphi$  koji je također funkcija od veličine periode pobude.

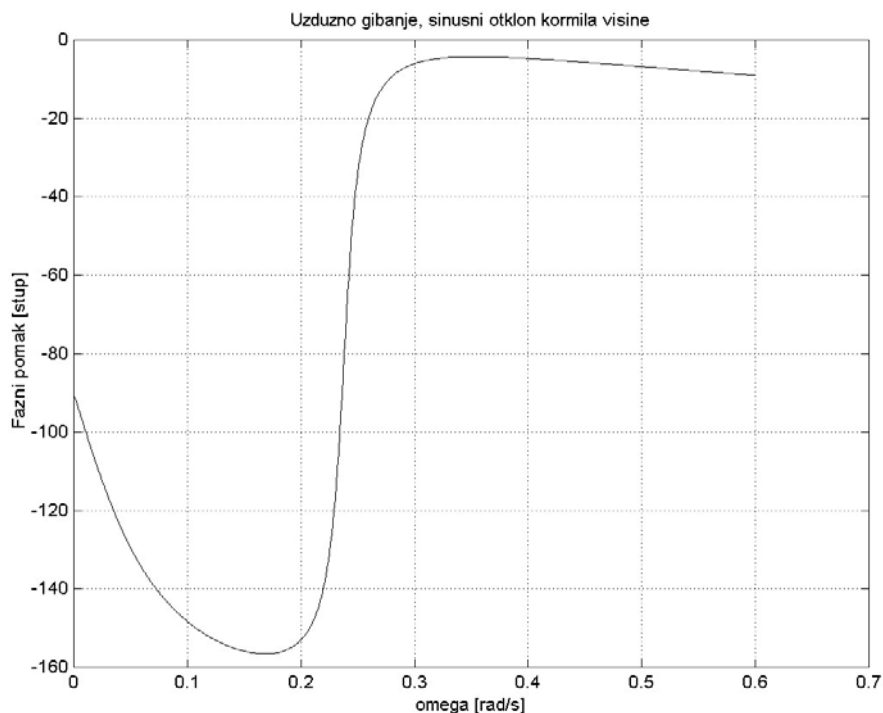
### 13.6.1 Primjer

Za slučaj malog zrakoplova iz prethodnih primjera treba usporediti pojačanje na odskočni otklon s pojačanjem na sinusni otklon kormila visine. Napravljen je program u MATLAB-u pod imenom *Odziv.m*, u direktoriju *Dinamička stabilnost\Uzdužna* na disketi. Kao što se moglo očekivati, pri malim učestalostima pojačanje je jednako pojačanju na odskok.



Slika 13-9 Pojaćanje ovisno o  $\omega$  otklona kormila visine

Nakon toga dostiže maksimalnu vrijednost pri  $\omega$  koja odgovara imaginarnom dijelu manjega korijena, tj. učestalosti dugoperiodičnog moda. To je rezonanca. Pri tim učestalostima pojaćanje je suviše veliko i opasno. Uočimo da se ona pojavljuje u okolini učestalosti dugoperiodičnog moda. U okolini učestalosti kratkoperiodičnog moda analiza pokazuje da nema nikakve rezonance.

Slika 13-10 Fazni pomak ovisno o  $\omega$  otklona kormila visine

### 13.7 Ocjena kvalitete neposrednog upravljanja uzdužnim gibanjem

Vlastite vrijednosti matrice **A** (korijeni karakteristične jednadžbe) jedna su od objektivnih ocjena kvalitete zrakoplova. Ta se ocjena provodi na osnovi veličina koje ovise o korijenima karakteristične jednadžbe. Letovi se svrstavaju u tri kategorije: A, B i C, a u svakoj kategoriji letova zrakoplovi se svrstavaju u tri klase. Klase su određene uvjetima koji se postavljaju korijenim akarakteristične jednadžbe, a ti uvjeti ovise o kategoriji leta

U kategoriju A spadaju letovi tijekom kojih se izvode brzi manevri i čije putanje moraju biti vrlo precizne, kao na primjer borbeni zrakoplovi koji ciljaju za vrijeme leta, ili letjelice koje tijekom leta moraju pratiti konfiguraciju Zemljišta itd.

U kategoriju B uvrštavaju se letovi tijekom kojih nema zahtjeva za velikim manevarskim sposobnostima niti za velikom točnosti putanja, ali ti zahtjevi mogu biti postavljeni u blažoj formi, kao npr. za slučaj zrakoplova koji opskrbljuje gorivom u letu druge zrakoplove, zatim letovi za vrijeme penjanja i spuštanja te letovi pri odbacivanju praznih spremnika goriva itd.

U treću kategoriju C spadaju letovi tijekom kojih nema velikih manevarskih zahtjeva, ali se zahtijevaju precizne putanje da bi zrakoplov mogao doći u neku određenu putanju, kao što su zrakoplovi koji se pune gorivom u letu, bombardiranja, polijetanje i slijetanje itd.

Dugoperiodičnim modovima se ocjenjuje klasa zrakoplova prema parametru *gušenje*  $\zeta$  ili prema vremenu  $\tau_2$  za sve kategorije letova.

Prva klasa zrakoplova ima gušenje  $\zeta > 0.04$

Druga klasa zrakoplova ima  $\zeta > 0$

Treća klasa zrakoplova može biti s negušenim modom ako je  $\tau_2 > 55$  s.

Kratkoperiodičnih modova ocjenjuju se parametrom gušenja koji ima tri klase ovisno o kategoriji leta prema tablici 13-1. Ako je gušenje malo, onda zrakoplov može imati vrlo neugodna njihanja, a ako je gušenje jako, tada zrakoplov može biti trom (lijen). To znači da imamo i gornju i donju granicu gušenja kratkoperiodičnih modova.

Tablica 13-1

$\zeta$ za kratko periodične modove				
Klasa	Kategorija A i C		Kategorija B	
	od	do	od	do
I	0.35	1.30	0.30	2.00
II	0.25	2.00	0.20	2.00
III	0.15	-	0.15	-

Tablica 13-2

$\frac{\omega_n^2}{n_\alpha}$						
Kateg.	A		B		C	
Klasa	od	do	od	do	od	do
I	0.28	3.6	0.085	3.6	0.16	3.6
II	0.16	10.0	0.038	10.0	0.096	10.0
III	0.16	-	0.038	-	0.096	-

Isto tako propisuju se prema tablici 13-2 granice za odnos prirodne frekvencije  $\omega_n = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}$  kratkoperiodičnih modova prema gradijentu normalnog opterećenja po napadnom kutu

$$n_{\alpha} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} C_{L\alpha}}{W}$$

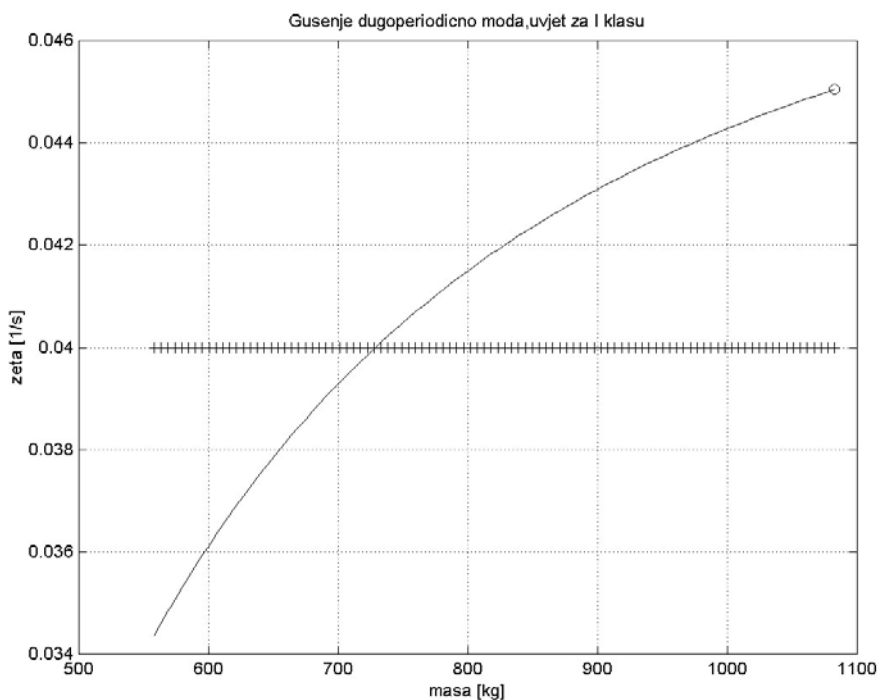
### 13.7.1 Primjer

Provedimo ocjenjivanje malog zrakoplova iz prethodnih primjera prema ovim kriterijima.

Za dugoperiodično gibanje faktor gušenja je pri najvećoj masi

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} = \frac{0.0108}{\sqrt{0.0108^2 + 0.237^2}} = 0.046.$$

Ova vrijednost odgovara za prvu klasu zrakoplova jer je  $\zeta > 0.040$ .



Slika 13-11

Međutim mali zrakoplov može imati razne vrijednosti mase tijekom leta. Zato smo napravili program *Dugoperiodicni.m* koji se nalazi u direktoriju *Dinamicka stabilnost\uzduzna*, s kojim kontroliramo ovaj uvjet od maksimalne do minimalne mase. Taj program crta krivulju  $\zeta(m)$ , a na slici 13-11 nacrtana je i vrijednost  $\zeta_{\min}$  od koje mora biti veće  $\zeta$  bez obzira na masu  $m$ . S kružićem "o" označena je točka s najvećem masom za koju smo izračunali gušenje. S dijagrama vidimo da uvjet za prvu klasu nije zadovoljen kad je masa manja od 730 kg.

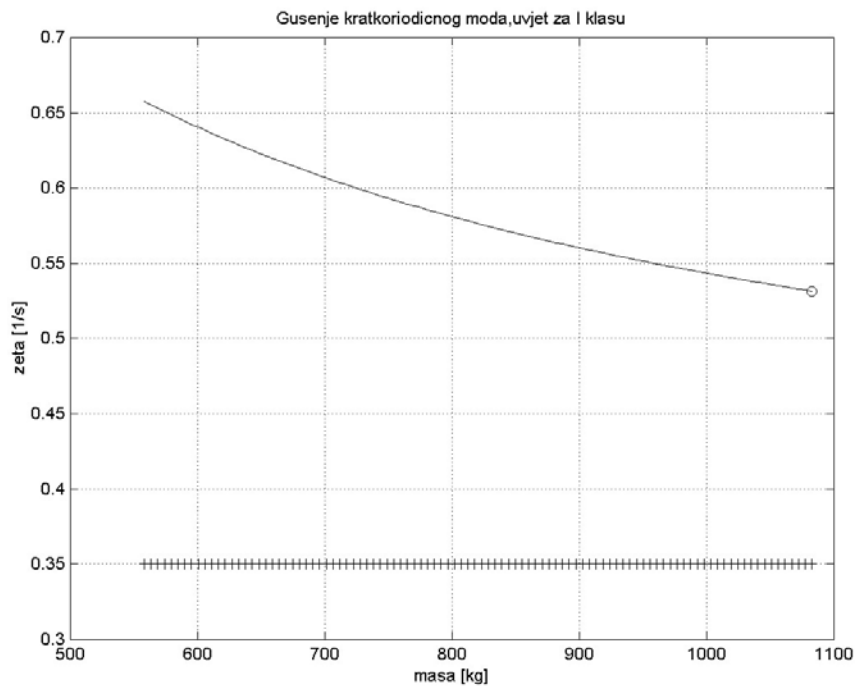
Parametar gušenja kratkoperiodičnog gibanja za najveću masu ima vrijednost

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} = \frac{2.45}{\sqrt{2.45^2 + 3.91^2}} = 0.53.$$

Prema kriteriju za kratkoperiodično gibanje za letove grupe A treba biti

$$0.35 < \zeta < 1.3$$

Taj uvjet zrakoplov ispunjava kada ima najveću masu. Pogledajmo pomoću programa *Kratkoperiodicni.m* da li zrakoplov zadovoljava taj uvjet kada masa opada zbog potrošnje goriva ili zbog manjeg tereta. Program crta krivulju  $\zeta(m)$  za kratkoperiodični mod i kao što se vidi sa slike 13-12 uvjet je bolje zadovoljen kad je masa manja od maksimalne.



Slika 13-12

Konačno proverimo i uvjet za kratkoperiodične modove

$$0.28 < \frac{\omega_n^2}{n_\alpha} < 3.6$$

Za maksimalnu masu bit će

$$\omega_n = \sqrt{\delta^2 + \omega^2} = \sqrt{2.447^2 + 3.907^2} = 4.61.$$

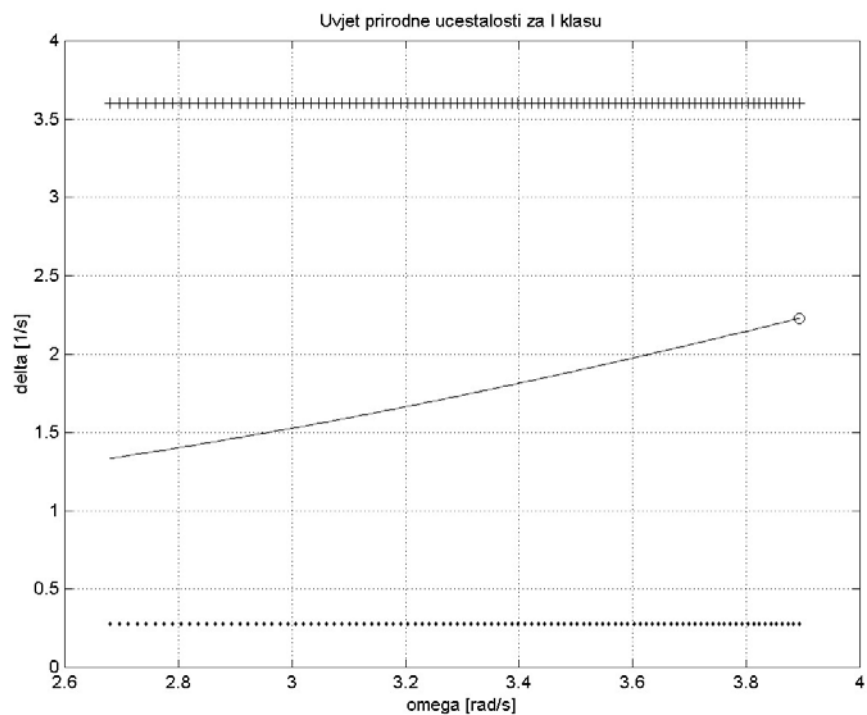
$$n_\alpha = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} C_{L\alpha}}{W} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1.0066 \cdot 53.1^2 \cdot 15.06 \cdot 4.72}{1088 \cdot 9.81} = 9.45$$



Traženi parametar ima vrijednost

$$\frac{\omega_n^2}{n_\alpha} = \frac{4.61^2}{9.45} = 2.25$$

Prema kriteriju za kratkoperiodične modove, mali zrakoplov s maksimalnom masom, spada u prvu klasu za letove A grupe. Pomoću programa *Uvjeti.m* pogledajmo da li pri manjim masama zrakoplov ispunjava ovaj uvjet za kratkoperiodične modove. Rezultat toga programa je slika 13-13 .



Slika 13-13

Vidimo da zrakoplov za sve vrijednosti mase od maksimalne do minimalne ispunjava uvjet za kratkoperiodične modove.

