

## 14 DINAMIČKA STABILNOST BOČNOG GIBANJA

### 14.1 Modovi bočnog gibanja

Cjelokupan sustav diferencijalnih jednadžbi poremećaja zrakoplova s elisnim pogonom bio je:

$$\Delta \dot{u} = \left( X_u^o - \frac{T^o \cos \alpha_T}{mu} \right) \Delta u + X_\alpha^o \Delta \alpha - g \cos \mathcal{G}^o \Delta \mathcal{G}$$

$$\Delta \dot{\beta} = \frac{Y_\beta^o}{u^o} \Delta \beta + \frac{Y_p^o}{u^o} \Delta p + \left( -1 + \frac{Y_r^o}{u^o} \right) \Delta r + \frac{g \cos \mathcal{G}^o}{u^o} \Delta \phi + \frac{Y_{\delta_n}^o}{u^o} \Delta \delta_n$$

$$\Delta \dot{\alpha} = \frac{Z_u^o - \frac{T^o \sin \alpha_T}{mu}}{u^o - Z_\alpha^o} \Delta u + \frac{Z_\alpha^o}{u^o - Z_\alpha^o} \Delta \alpha + \frac{u^o + Z_q^o}{u^o - Z_\alpha^o} \Delta q - \frac{g \sin \mathcal{G}^o}{u^o - Z_\alpha^o} \Delta \mathcal{G} + \frac{Z_{\delta_m}^o}{u^o - Z_\alpha^o} \Delta \delta_m$$

$$\Delta \dot{p} = L_\beta^0 \Delta \beta + L_p^0 \Delta p + L_r^0 \Delta r + L_{\delta_\ell}^0 \Delta \delta_\ell + L_{\delta_n}^0 \Delta \delta_n$$

$$\Delta \dot{q} = M_\alpha^0 \frac{Z_u^o - \frac{T^o \sin \alpha_T}{mu}}{u^o - Z_\alpha^o} \Delta u + \left( M_\alpha^0 + \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 Z_\alpha^o}{u^o - Z_\alpha^o} \right) \Delta \alpha - \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 g \sin \mathcal{G}^o}{u^o - Z_\alpha^o} \Delta \mathcal{G} + \left( M_q^0 + M_{\dot{\alpha}}^0 \frac{u^o + Z_q^o}{u^o - Z_\alpha^o} \right) \Delta q$$

$$+ \left( M_{\delta_m}^0 + \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 Z_{\delta_m}^o}{u^o - Z_\alpha^o} \right) \Delta \delta_m$$

$$\Delta \dot{r} = N_\beta^0 \Delta \beta + N_p^0 \Delta p + N_r^0 \Delta r + N_{\delta_\ell}^0 \Delta \delta_\ell + N_{\delta_n}^0 \Delta \delta_n$$

$$\Delta \dot{\phi} = \Delta p + \tan \mathcal{G}^o \Delta r$$

$$\Delta \dot{\mathcal{G}} = \Delta q$$

$$\Delta \dot{\psi} = \frac{\Delta r}{\cos \theta^o}$$

Prva, treća, peta i osma bile su jednadžbe uzdužnog gibanja koje smo proučili u prethodnom poglavlju. Preostalih pet jednadžba

$$\Delta \dot{\beta} = \frac{Y_\beta^o}{u^o} \Delta \beta + \frac{Y_p^o}{u^o} \Delta p + \left( -1 + \frac{Y_r^o}{u^o} \right) \Delta r + \frac{g \cos \mathcal{G}^o}{u^o} \Delta \phi + \frac{Y_{\delta_n}^o}{u^o} \Delta \delta_n$$

$$\Delta \dot{p} = L_\beta^0 \Delta \beta + L_p^0 \Delta p + L_r^0 \Delta r + L_{\delta_\ell}^0 \Delta \delta_\ell + L_{\delta_n}^0 \Delta \delta_n$$

$$\Delta \dot{r} = N_\beta^0 \Delta \beta + N_p^0 \Delta p + N_r^0 \Delta r + N_{\delta_\ell}^0 \Delta \delta_\ell + N_{\delta_n}^0 \Delta \delta_n$$

$$\Delta \dot{\phi} = \Delta p + \tan \mathcal{G}^o \Delta r$$

$$\Delta \dot{\psi} = \frac{\Delta r}{\cos \theta^o}$$

14.1

odnose se na skretanje i valjanje. Možemo ih riješiti neovisno o uzdužnom gibanju, ali ova dva gibanje (skretanje i valjanje) ne možemo rastaviti jer su im jednadžbe spregnute, tj.

moramo ih simultano rješavati. Zato ta dva simultana gibanja, skretanje i valjanje, zajednički nazivamo *bočno gibanje*. Zadnja jednačba definira kut skretanja letjelice, a on se ne pojavljuje u prethodnim jednačbama. Zato se ovaj sustav raspada na četiri + jedna jednačba. Prve četiri jednačbe:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\beta} &= \frac{Y_\beta^0}{u^0}\Delta\beta + \frac{Y_p^0}{u^0}\Delta p + \left(-1 + \frac{Y_r^0}{u^0}\right)\Delta r + \frac{g \cos \mathcal{G}^0}{u^0}\Delta\phi + \frac{Y_{\delta_n}^0}{u^0}\Delta\delta_n \\ \Delta\dot{p} &= L_\beta^0\Delta\beta + L_p^0\Delta p + L_r^0\Delta r + L_{\delta_\ell}^0\Delta\delta_\ell + L_{\delta_n}^0\Delta\delta_n \\ \Delta\dot{r} &= N_\beta^0\Delta\beta + N_p^0\Delta p + N_r^0\Delta r + N_{\delta_\ell}^0\Delta\delta_\ell + N_{\delta_n}^0\Delta\delta_n \\ \Delta\dot{\phi} &= \Delta p + \tan \mathcal{G}^0\Delta r\end{aligned}\quad 14.2$$

imaju varijable

$$[\Delta\beta \quad \Delta p \quad \Delta r \quad \Delta\phi]^T,$$

a petu varijablu  $\Delta\psi$  ako je trebamo rješavamo naknadno. I ovdje smo dobili nehomogene linearne diferencijalne jednačbe oblika:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta^0}{u^0} & \frac{Y_p^0}{u^0} & \frac{Y_r^0}{u^0} - 1 & \frac{g \cos \mathcal{G}^0}{u^0} \\ L_\beta^0 & L_p^0 & L_r^0 & 0 \\ N_\beta^0 & N_p^0 & N_r^0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \mathcal{G}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{Y_{\delta_n}^0}{u^0} \\ L_{\delta_\ell}^0 & L_{\delta_n}^0 \\ N_{\delta_\ell}^0 & N_{\delta_n}^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_\ell \\ \Delta\delta_n \end{bmatrix}\quad 14.3$$

koje kraće pišemo

$$\frac{d}{dt} \Delta\mathbf{X} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{e}.\quad 14.4$$

U toj matricnoj jednačbi poremećaja bočnog gibanja, vektor stanja ima četiri komponente  $\Delta\mathbf{X} = [\Delta\beta \quad \Delta p \quad \Delta r \quad \Delta\phi]^T$ , a vektor upravljanja  $\mathbf{e} = [\Delta\delta_\ell \quad \Delta\delta_n]^T$ , za razliku od uzdužnog gibanja, ima dvije dimenzije. Matrica sustava i matrica upravljanja su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta^0}{u^0} & \frac{Y_p^0}{u^0} & \frac{Y_r^0}{u^0} - 1 & \frac{g \cos \theta^0}{u^0} \\ L_\beta^0 & L_p^0 & L_r^0 & 0 \\ N_\beta^0 & N_p^0 & N_r^0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \mathcal{G}^0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Y_{\delta_n}^0}{u^0} \\ L_{\delta_\ell}^0 & L_{\delta_n}^0 \\ N_{\delta_\ell}^0 & N_{\delta_n}^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad 14.5$$

Kao što vidimo matrica  $\mathbf{A}$  je opet četvrtog reda pa je i karakteristični polinom bočnog gibanja

$$D(s) = |\mathbf{A} - s\mathbf{J}|\quad 14.6$$

polinom četvrtoga reda kao i u slučaju uzdužnog gibanja, koji mora biti jednak 0 da bi postojalo *homogeno rješenje*:

$$D(s) = s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 = 0 \quad 14.7$$

Taj polinom ima četiri korijena  $s_1, s_2, s_3$  i  $s_4$ . Korijene određujemo u MATLAB-u na isti način kao i u slučaju uzdužnog gibanja pomoću sistemskih rutina

$$\mathbf{p} = \text{poly}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{s} = \text{root}(\mathbf{p}),$$

gdje su  $\mathbf{p} = [1 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]$  koeficijenti karakterističnog polinoma matrice  $\mathbf{A}$ .

Homogeno rješenje je oblika:

$$\begin{bmatrix} \Delta\beta_h \\ \Delta p_h \\ \Delta r_h \\ \Delta\phi_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\beta 1} & C_{\beta 2} & C_{\beta 3} & C_{\beta 4} \\ C_{p1} & C_{p2} & C_{p3} & C_{p4} \\ C_{r1} & C_{r2} & C_{r3} & C_{r4} \\ C_{\phi 1} & C_{\phi 2} & C_{\phi 3} & C_{\phi 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t} \\ e^{s_2 t} \\ e^{s_3 t} \\ e^{s_4 t} \end{bmatrix} \quad 14.8$$

a možemo ga napisati u obliku:

$$\Delta\mathbf{X}_h = \mathbf{C}_1 e^{s_1 t} + \mathbf{C}_2 e^{s_2 t} + \mathbf{C}_3 e^{s_3 t} + \mathbf{C}_4 e^{s_4 t} \quad 14.9$$

Svakom korijenu, tj. svakom članu  $e^{s_i t}$  gibanja, odgovara jedan vektor konstanta, a to znači da vektor  $\mathbf{C}_i$  uz član  $e^{s_i t}$  ima 4 konstante, tj.  $\mathbf{C}_i = [C_{\beta i} \quad C_{p i} \quad C_{r i} \quad C_{\phi i}]^T$ , prva je u jednadžbi za  $\Delta\beta$ , druga u jednadžbi za  $\Delta p$ , treća u jednadžbi za  $\Delta r$  i četvrta u jednadžbi za  $\Delta\phi$ .

Partikularni integral  $\Delta\mathbf{X}_p$  tražimo u obliku konstantnog vektora za slučaj konstantnog odskoka otklona  $\Delta\delta_\ell$  i  $\Delta\delta_n$ , pa on mora zadovoljiti jednadžbu

$$0 = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X}_p + \mathbf{B}\Delta\mathbf{e}$$

u kojoj je vektor upravljanja  $\Delta\mathbf{e}$  konstantan. To znači da je

$$\Delta\mathbf{X}_p = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\Delta\mathbf{e} \quad 14.10$$

Kao i u slučaju uzdužnog gibanja, uvodimo matricu *aerodinamičkog pojačanja* bočnog gibanja

$$\mathbf{K} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad 14.11$$

koja ima dva stupca svaki s četiri člana, jer imamo dva parametra upravljanja.

Konačno, bočno gibanje je zbroj homogenog i partikularnog integrala:

$$\Delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{C}_i e^{s_i t} + \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_\ell \\ \Delta\delta_n \end{bmatrix}. \quad 14.12$$

### 14.1.1 Primjer

Za laki putnički zrakoplov za koji smo odredili modove uzdužnog gibanja treba odrediti modove bočnog gibanja. Potrebne karakteristike za bočno gibanje su

$$S = 15.09m^2$$

$$b = 8.77m ;$$

masene karakteristike:

$$m = 1088. kg \quad I_X = 1450 kg \cdot m^2 \quad I_Z = 3134 kg \cdot m^2 ;$$

aerodinamičke karakteristike (vidi primjere 5.4.3, 5.5 i 5.4.4):

$$\begin{array}{lll} C_{Y\beta} = -0.317 & C_{\ell\beta} = -0.105 & C_{n\beta} = 0.154 \\ C_{Yp} = -0.0283 & C_{\ell p} = -0.193 & C_{np} = 0.0143 \\ C_{Yr} = 0.119 & C_{\ell r} = 0.75\alpha + 0.056 & C_{nr} = -0.0604 \\ C_{Y\delta_n} = 0.137 & C_{\ell\delta_\ell} = 0.517 & C_{n\delta_\ell} = -0.0344 \\ & C_{\ell\delta_n} = 0.0122 & C_{n\delta_n} = -0.0721 \end{array}$$

Zrakoplov leti horizontalno brzinom  $V = 53.1 m/s$  pa je  $\mathcal{G} = \alpha_T = \alpha_{rav} = 3.3^0$ , pa je

$$C_{\ell r} = 0.75 \cdot \frac{3.3}{57.3} + 0.056 = 0.0992$$

Rješenje pomoću MATLAB-a dano je u programu koji se zove *ABroot.m*, a nalazi se na CD-u u direktoriju "*Dinamicka stabilnost\Bocna*":

$$A = \begin{bmatrix} -0.1176 & -0.0017 & -0.9927 & 0.1844 \\ -13.6073 & -4.1309 & 2.1232 & 0 \\ 9.2336 & 0.1416 & -0.5981 & 0 \\ 0 & 1 & 0.0577 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0.0508 \\ 66.9997 & 1.5810 \\ -2.0626 & -4.3230 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Korijeni su

$$s_1 = -4.2323$$

$$s_2 = -0.3389 + 3.0327i$$

$$s_3 = -0.3389 - 3.0327i$$

$$s_4 = 0.0634$$

Kao što vidimo iz ovog primjera bočno gibanje ima tri tipa korijena karakteristične jednadžbe:

- negativni realni korijen kome odgovara aperiodični mod,
- konjugirano kompleksni korijen kome odgovara gušeni harmonijski mod, tzv. *Dutch mod*,
- jedan mali realni korijen koji može biti pozitivan kome odgovara aperiodični mod, tzv. *spiralni mod*.

## 14.2 Prijenosne funkcije po otklonu kormila pravca ili krilaca

Općenito uzevši, analiza bočnoga gibanja po otklonu kormila pravca ista je kao analiza uzdužnoga gibanja zbog otklona kormila visine. Međutim s obzirom na druge vrijednosti matrica  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  rezultat analize je različit.

Laplace-ova transformacija linearnog sustava bočnog gibanja je

$$s\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}(s). \quad 14.13$$

Matrice  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  su konstantne (jednadžbe 14.5), a vektor upravljanja  $\mathbf{e}(s)$  ima dvije komponente koje su Laplace-ova transformacija zadanih funkcija  $\Delta\delta_i(t)$  i  $\Delta\delta_n(t)$ . Zbog linearnog karaktera odgovor na istodobne otklone kormila pravca i krilca bit će zbroj odgovora na otklon samo kormila pravca i samo krilca. Zato ćemo te odgovore analizirati odvojeno.

Pretpostavimo da nema otklona krilaca već je otklonjeno samo kormilo pravca. Tada linearni sustav jednadžbi 14.13 ima oblik:

$$s\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}_2\Delta\delta_n(s) \quad 14.14$$

gdje je matrica  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta^0}{u^0} & \frac{Y_p^0}{u^0} & \frac{Y_r^0}{u^0} - 1 & \frac{g \cos \theta^0}{u^0} \\ L_\beta^0 & L_p^0 & L_r^0 & 0 \\ N_\beta^0 & N_p^0 & N_r^0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \mathcal{G}^0 & 0 \end{bmatrix} \quad 14.15$$

a matrica  $\mathbf{B}_2$  je drugi stupac od matrice  $\mathbf{B}$  (jednadžba 14.5)

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta_n}^0}{u^0} \\ L_{\delta_n}^0 \\ N_{\delta_n}^0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 14.16$$

Ako nema otklona kormila pravca  $\Delta\delta_n(t) = 0$ , ali su otklonjena krilca onda je Laplace-ova transformacija linearnog sustava bočnog gibanja

$$s\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}_1\Delta\delta_i(s) \quad 14.17$$

Matrica  $\mathbf{A}$  je ista kao i u prethodnom slučaju, ali matrica  $\mathbf{B}_1$  je prvi stupac od matrice  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ L_{\delta_n}^0 \\ N_{\delta_n}^0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 14.18$$

U oba slučaja uvodimo prijenosne funkcije bočnog gibanja:

- po otklonu kormila pravca.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\delta_n}(s) &= [G_{\beta\delta_n}(s) \quad G_{p\delta_n}(s) \quad G_{r\delta_n}(s) \quad G_{\phi\delta_n}(s)]^T = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\delta_n(s)} & \frac{\Delta p(s)}{\Delta\delta_n(s)} & \frac{\Delta r(s)}{\Delta\delta_n(s)} & \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_n(s)} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad 14.19$$

gdje su  $\Delta\beta$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta r$  i  $\Delta\phi$  odgovori na otklon  $\Delta\delta_n$ ,

- po otklonu krilca

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\delta_\ell}(s) &= [G_{\beta\delta_\ell}(s) \quad G_{p\delta_\ell}(s) \quad G_{r\delta_\ell}(s) \quad G_{\phi\delta_\ell}(s)]^T = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\delta_\ell(s)} & \frac{\Delta p(s)}{\Delta\delta_\ell(s)} & \frac{\Delta r(s)}{\Delta\delta_\ell(s)} & \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_\ell(s)} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad 14.20$$

gdje su  $\Delta\beta$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta r$  i  $\Delta\phi$  odgovori na otklon  $\Delta\delta_\ell$ .

Poslije smjene  $\frac{\Delta\mathbf{X}(s)}{\Delta\delta_n(s)} = \mathbf{G}_{\delta_n}(s)$  u jednadžbe 14.14 i  $\frac{\Delta\mathbf{X}(s)}{\Delta\delta_\ell(s)} = \mathbf{G}_{\delta_\ell}(s)$  u jednadžbu 14.17

dobivamo sustave algebarskih jednadžbi koji određuje prijenosne funkcije

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{J}) \cdot \mathbf{G}_{\delta_n}(s) = -\mathbf{B}_2 \quad 14.21$$

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{J}) \cdot \mathbf{G}_{\delta_\ell}(s) = -\mathbf{B}_1 \quad 14.22$$

Rješenjem ovih sustava algebarskih jednadžbi dobivamo prijenosne funkcije

$$\mathbf{G}_{\delta_n}(s) = \frac{\mathbf{N}_{\delta_n}(s)}{D(s)} \quad 14.23$$

$$\mathbf{G}_{\delta_\ell}(s) = \frac{\mathbf{N}_{\delta_\ell}(s)}{D(s)} \quad 14.24$$

Polinomi  $\mathbf{N}_{\delta_n}(s) = [N_{\beta\delta_n}(s) \quad N_{p\delta_n}(s) \quad N_{r\delta_n}(s) \quad N_{\phi\delta_n}(s)]^T$  trećeg reda predstavljaju vrijednosti determinanta koje dobivamo kada u determinantu sustava  $|\mathbf{A} - s\mathbf{J}|$  zamjenimo odgovarajući stupac uz poremećaj sa stupcem  $\mathbf{B}_2$  (drugim stupcem matrice  $\mathbf{B}$ ) kome prethodno promijenimo predznak.

Isto tako dobivamo polinome  $\mathbf{N}_{\delta_\ell}(s) = [N_{\beta\delta_\ell}(s) \ N_{p\delta_\ell}(s) \ N_{r\delta_\ell}(s) \ N_{\phi\delta_\ell}(s)]^T$  stim da stupce u determinanti  $|\mathbf{A} - s\mathbf{J}|$  zamjenjujemo sa stupcem  $\mathbf{B}_1$ . Uočimo da je determinanta sustava  $|\mathbf{A} - s\mathbf{J}|$  ista za otklone kormila pravca i krilca.

### 14.3 Odgovor na impuls kormila pravca ili krilaca

Kada znamo prijenosne funkcije lako je odrediti odgovor na neki određeni otklon kormila pravca ili krilaca. Taj odgovor bit će u Laplace-ovom području

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_{\delta_n}(s) \cdot \Delta\delta_n(s)$$

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_{\delta_\ell}(s) \cdot \Delta\delta_\ell(s)$$

Ako je  $\Delta\delta_n(s) = 1$ , onda je

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_{\delta_n}(s) \quad 14.25$$

ili ako je  $\Delta\delta_\ell(s) = 1$ , onda je

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_{\delta_\ell}(s) \quad 14.26$$

Kao i u slučaju uzdužnog gibanja izlaze veličine u realnom vremenu  $\Delta\mathbf{X}(t)$  zbog jediničnog impulsa označimo sa

$$\mathbf{h}(s) = [h_\beta(s) \ h_p(s) \ h_r(s) \ h_\phi(s)]^T.$$

One će biti jednake inverznim Laplace-ovim transformacijama od prijenosnih funkcija

$$\mathbf{h}(t) = L^{-1}[\mathbf{G}_{\delta_n}(s)], \quad 14.27$$

ili

$$\mathbf{h}(t) = L^{-1}[\mathbf{G}_{\delta_\ell}(s)], \quad 14.28$$

Te inverzne transformacije vršimo primjenom *Heavisideova teorema razvoja*. jer su prijenosne funkcije, određene jednadžbama 14.23 i 14.24, pravi razlomci koji u brojniku imaju polinome trećeg reda  $\mathbf{N}_{\delta_n}(s)$  ili  $\mathbf{N}_{\delta_\ell}(s)$ , a i nazivniku sve prijenosne funkcije imaju isti polinom četvrtog reda  $D(s)$  čiji su korijeni  $s_1, s_2, s_3$  i  $s_4$ .

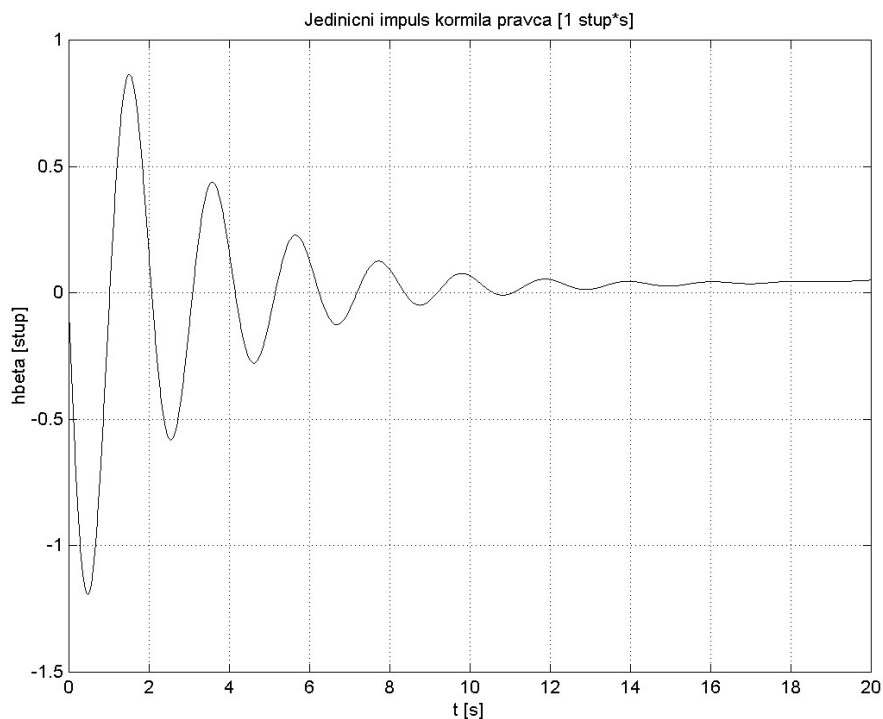
$$\mathbf{h}(t) = L^{-1}\left(\frac{\mathbf{N}(s)}{D(s)}\right) = \frac{\mathbf{N}(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} e^{s_1 t} + \frac{\mathbf{N}(s_2)}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} e^{s_2 t} + \frac{\mathbf{N}(s_3)}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)} e^{s_3 t} + \frac{\mathbf{N}(s_4)}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)} e^{s_4 t}. \quad 14.29$$

Ukoliko tražimo odgovor na impuls kormila pravca treba uzeti polinome  $\mathbf{N}_{\delta_a}(s)$ , a odgovor na impuls krilaca dobivamo uvrštavanjem polinoma  $\mathbf{N}_{\delta_r}(s)$ . U oba slučaja, imamo u realnom vremenu odgovore na impuls kormila pravca ili krilca, u obliku

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}_1 e^{s_1 t} + \mathbf{C}_2 e^{s_2 t} + \mathbf{C}_3 e^{s_3 t} + \mathbf{C}_4 e^{s_4 t}. \quad 14.30$$

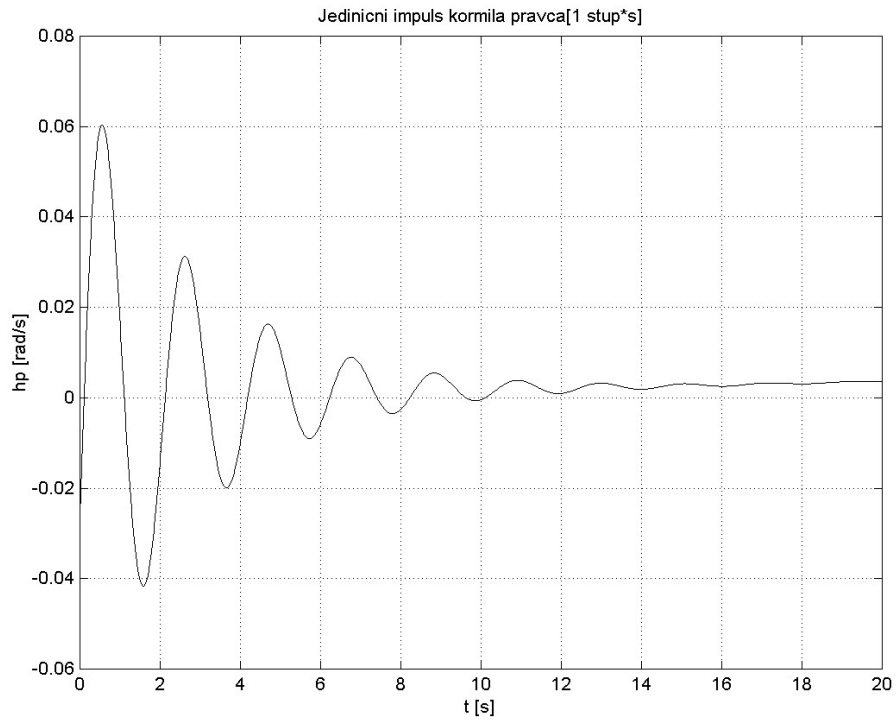
### 14.3.1 Primjer

Pogledajmo odgovore našeg malog zrakoplova čije smo korijene karakteristične jednadžbe bočnog gibanja već odredili. Prvo ćemo analizirati odgovore na impulsi otklon kormila pravca. Oni su određeni primjenom programa *impuls.m*, koji se nalazi na disketi u direktoriju "*Dinamička stabilnost/Bocna*", a koji je sličan onom koji smo koristili za uzdužno gibanje. U programu matrica  $\mathbf{B}$  ima dva stupca: prvi stupcu za slučaj otklona krilaca, a drugi za slučaj otklona kormila pravca pa je zato za analizu odgovora na impuls kormila pravca potrebno staviti parametar  $ib=2$ . Rezultati su prikazani dijagramima na slikama 14-1, 14-2, 14-3 i 14-4.

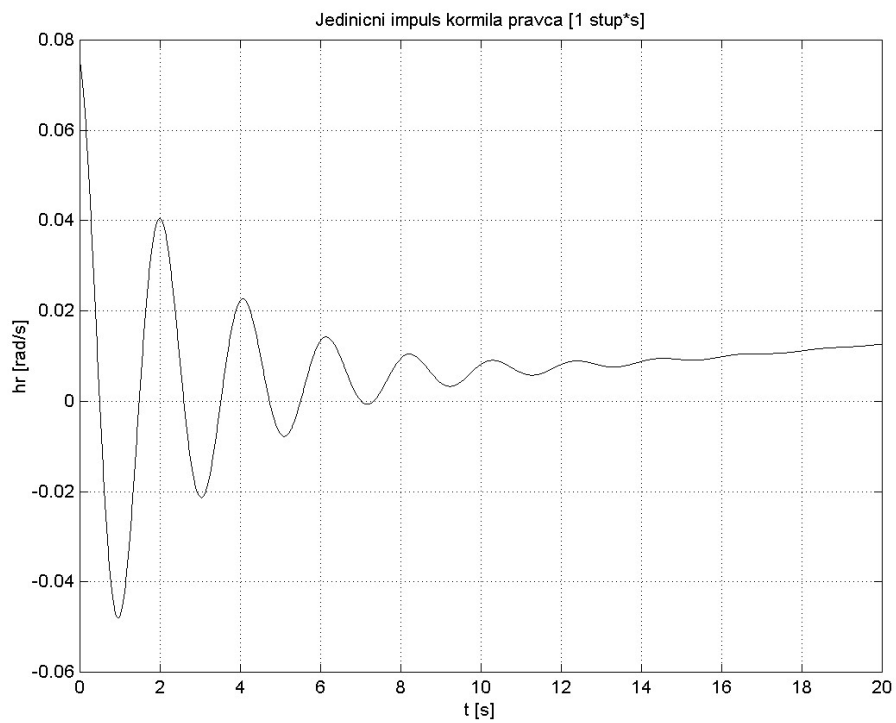


Slika 14-1  $\Delta u(t)$  za jedinični impuls kormila pravca

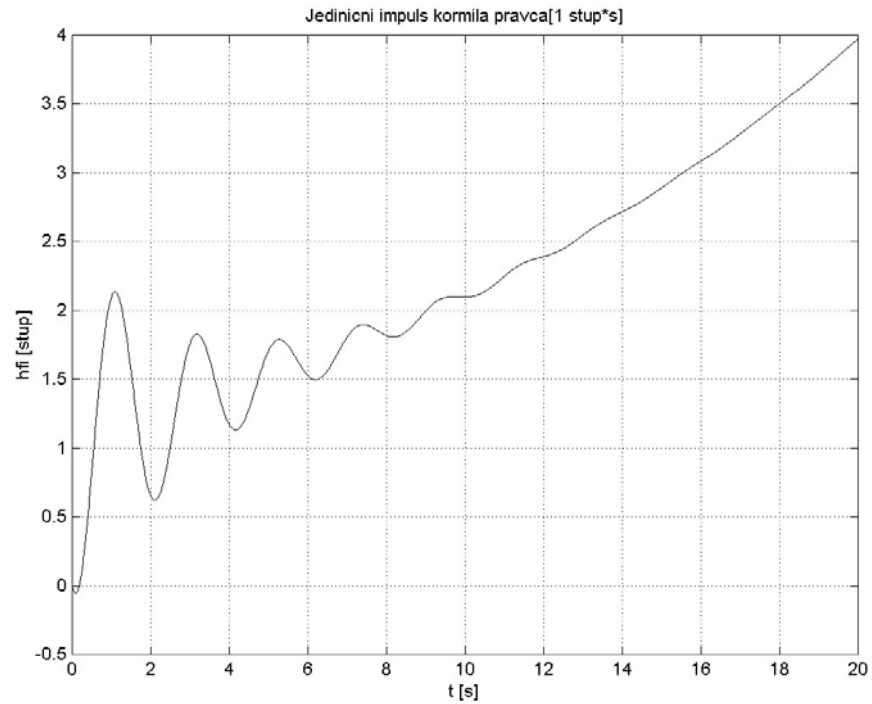
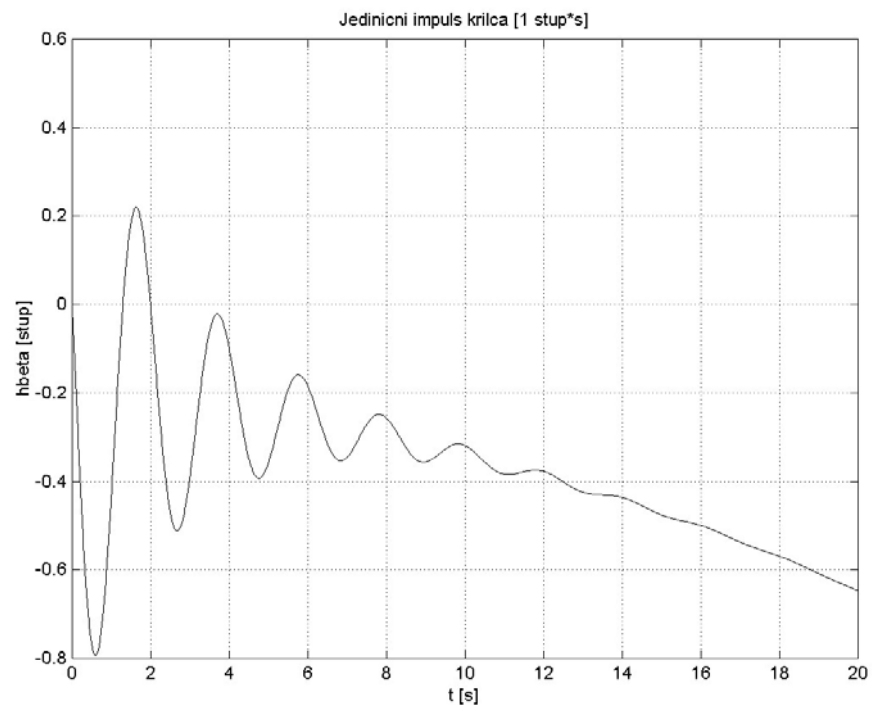


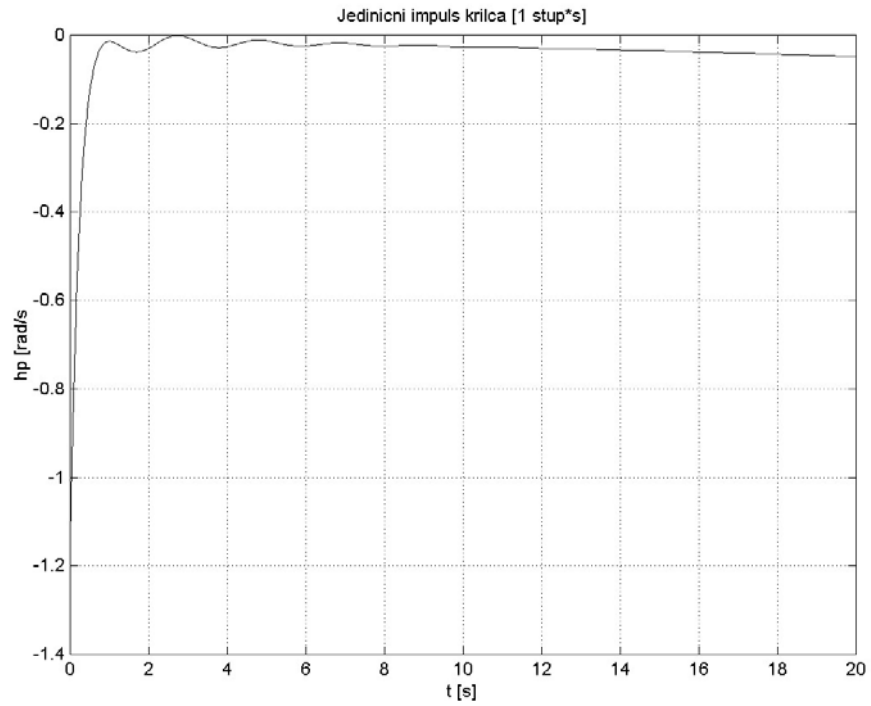


Slika 14-2  $\Delta p(t)$  za jedinični impuls kormila pravca

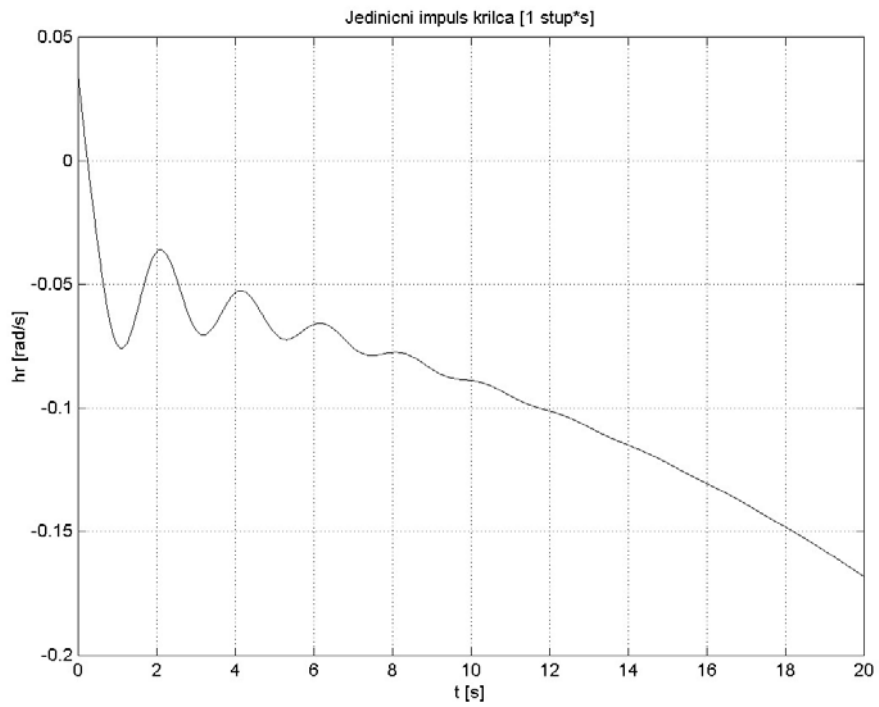


Slika 14-3  $\Delta r(t)$  za jedinični impuls kormila pravca

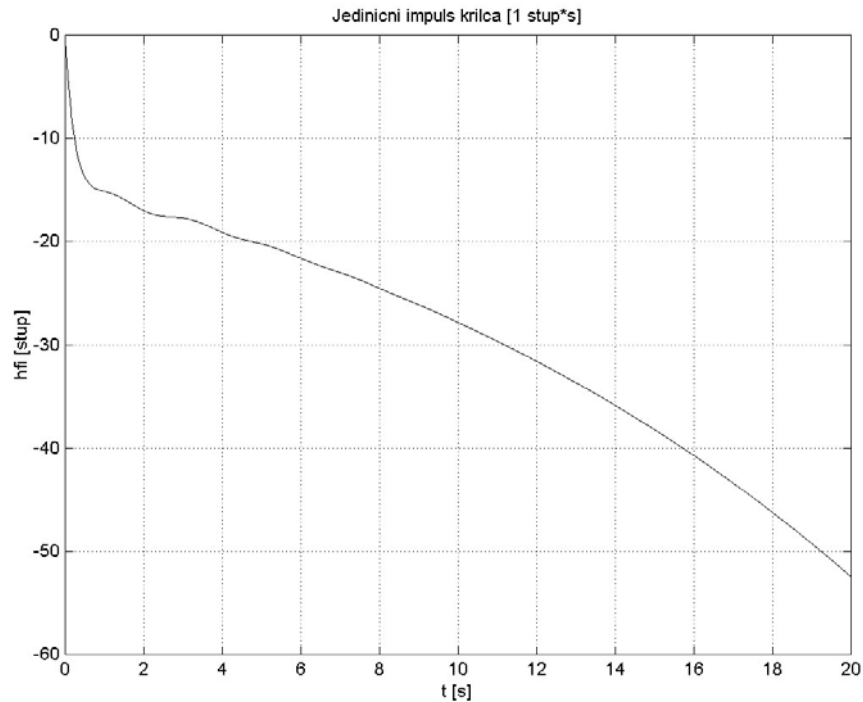
Slika 14-4  $\Delta\phi(t)$  za jedinični impuls kormila pravcaSlika 14-5  $\Delta\beta(t)$  zbog impulsa krilca



Slika 14-6  $\Delta p(t)$  zbog impulsa krilca



Slika 14-7  $\Delta r(t)$  zbog impulsa krilca

Slika 14-8  $\Delta\phi(t)$  zbog impulsa krilca

Za analizu odgovora na impuls krilca treba staviti u program  $ib=1$ . Rezultati su na slikama 14-5, 14-6 14-7 i 14-8. Kao što vidimo s ovih dijagrama Dutch mod dao je početne ali gušene titraje, dok je spiralni mod (pozitivni korijen) uzrok stalnom porastu poremećaja poslije gušenja Dutch moda. Srećom to povećanje poremećaja nije brzo te je pilot u mogućnosti ručno ga korigirati.

#### 14.4 Odgovor na odskok kormila pravca ili krilca

Ako tražimo odgovor na jedinični odskok kormila pravca ili krilaca. Laplace-ova je transformacija od jediničnog odskoka je  $\frac{1}{s}$ , pa je u Laplace-ovom području

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \frac{\mathbf{G}(s)}{s}$$

ili u realnom vremenu :

$$\Delta\mathbf{X}(t) = L^{-1} \left[ \frac{\mathbf{N}(s)}{s \cdot D(s)} \right]$$

s tim da treba uzeti polinome  $N_{\delta_n}(s)$  u slučaju odskoka kormila pravca, odnosno  $N_{\delta_r}(s)$  u slučaju odskoka krilaca. Polinom  $s \cdot D(s)$  petog je reda koji ima četiri korijena od karakteristične jednadžbe bočnog gibanja  $s_1, s_2, s_3, s_4$  i peti korijen koji je jednak nuli  $s_5 = 0$ . Primjenom Heavisideova teorema bit će poremećaji bočnog gibanja u realnom vremenu

$$\Delta \mathbf{X} = \frac{N(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)s_1} e^{s_1 t} + \frac{N(s_2)}{(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} + \frac{N(s_3)}{(s_3 - s_4)s_3(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} e^{s_3 t} + \frac{N(s_4)}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)s_4} e^{s_4 t} + \frac{N(0)}{s_1 s_2 s_3 s_4} \quad 14.31$$

To rješenje možemo napisati u obliku

$$\Delta \mathbf{X}(s) = \sum_{i=1,4} C_i e^{s_i t} + \mathbf{K} \quad 14.32$$

I ako su rješenja po obliku ista za odskok kormila pravca i krilca, poremećaji bočnog gibanja bit će različiti zato što smo polinome  $N_{\delta_n}(s)$  dobili pomoću stupca  $\mathbf{B}_2$ , a polinome  $N_{\delta_r}(s)$  pomoću stupca  $\mathbf{B}_1$ . Podsjetimo se, da su u oba slučaja korijeni  $s_1, s_2, s_3, s_4$  isti, dva kompleksno konjugirana korijena daju Dutch mod, jedan realan ali negativan daje aperiodičan mod i konačno jedna realan i pozitivan, ali mali, daje spiralni mod u oba odgovora.

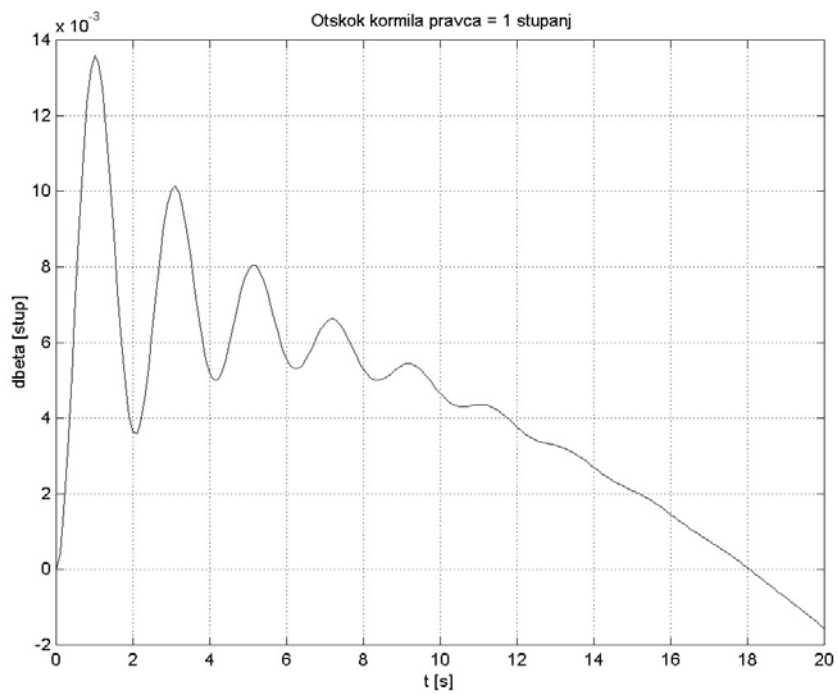
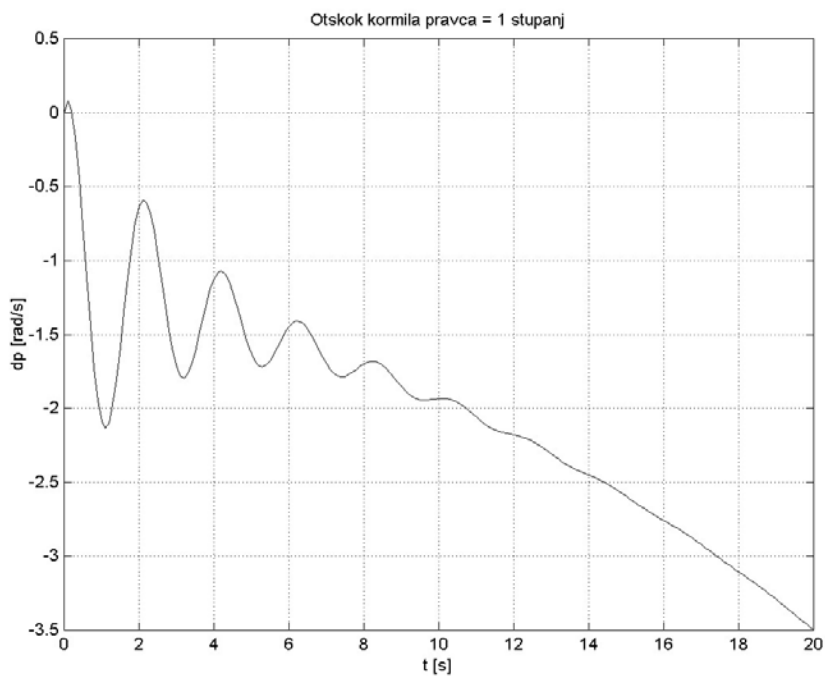
#### 14.4.1 Primjer

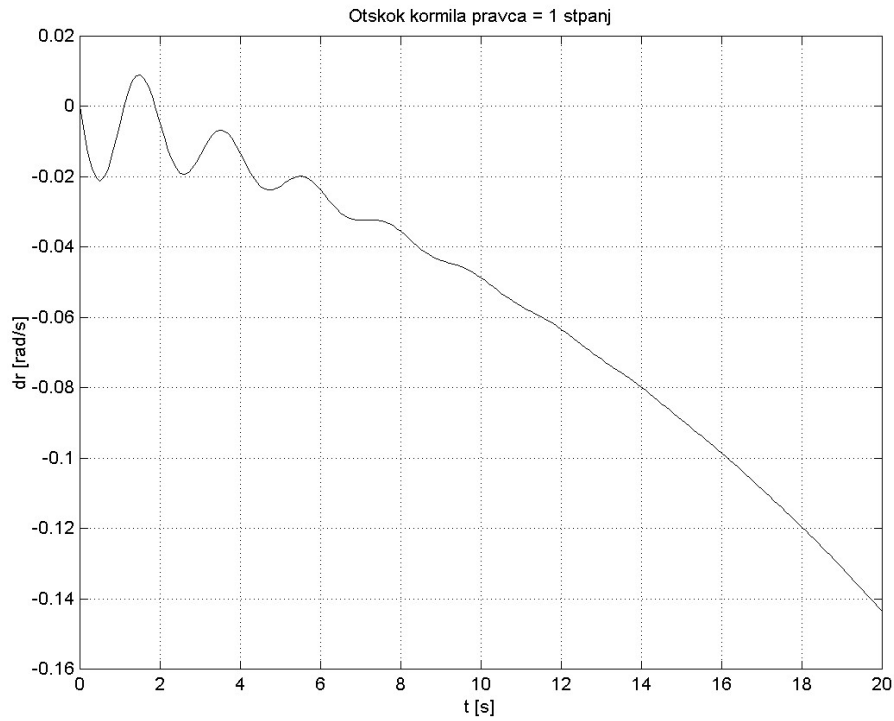
Za mali zrakoplov odredili smo odgovore na jedinični odskok kormila pravca i zatim i krilaca pomoću programa *otsk.m* (nalazi se u istom direktoriju na CD-u). Rezultati su prikazani za slučaj odskoka kormila pravca dijagramima na slikama 14-9, 14-10, 14-11 i 14-12. Program je napravljen korištenjem naredbe LSIM iz MATLAB-a pomoću koje se definira jedan linearni sistem tipa

$$s \cdot \Delta \mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}(s)$$

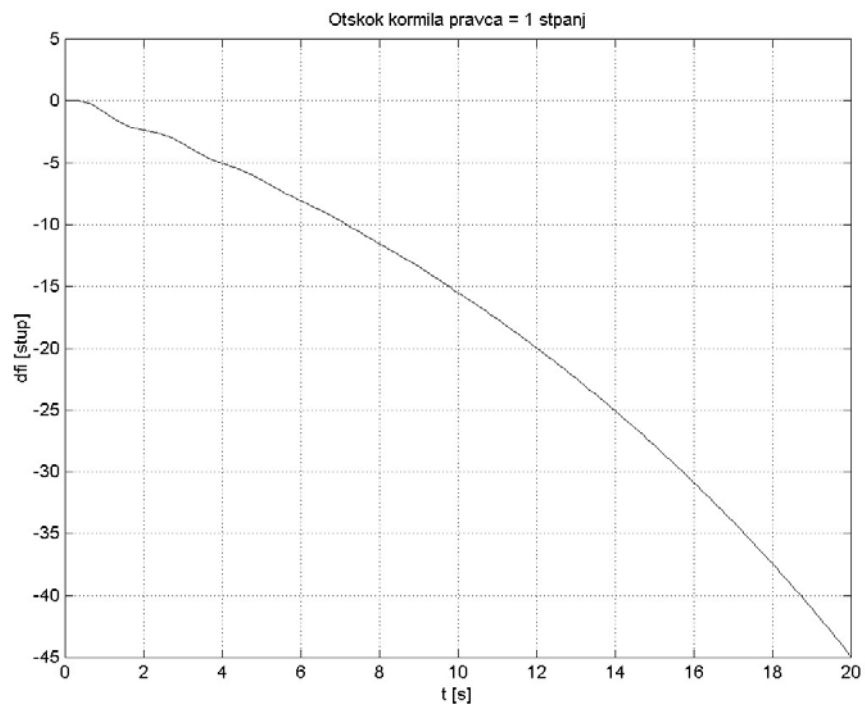
u kome vektor upravljanja  $\mathbf{e}$  ima dva stupca: prvi definira otklon krilaca na svakom koraku integracije, a drugi otklon kormila pravca također u svakom koraku integracije. I u ovom slučaju analizom poremećaja na odskok kormila pravca vidimo da poslije smirivanja Dutch moda svi poremećaji polako rasu zbog spiralnog moda (pozitivni realni korijen).

S istim programom *otsk.m* analizirali smo i poremećaje bočnog gibanja zbog odskoka krilca, a rezultati su prikazani na slikama 14-13, 14-14, 14-15 i 14-16.

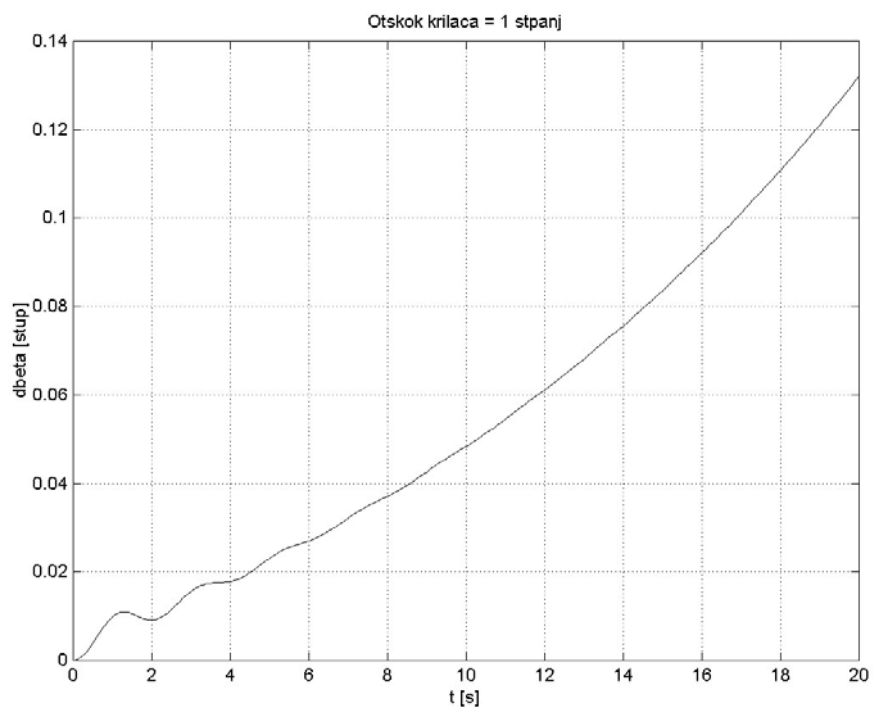
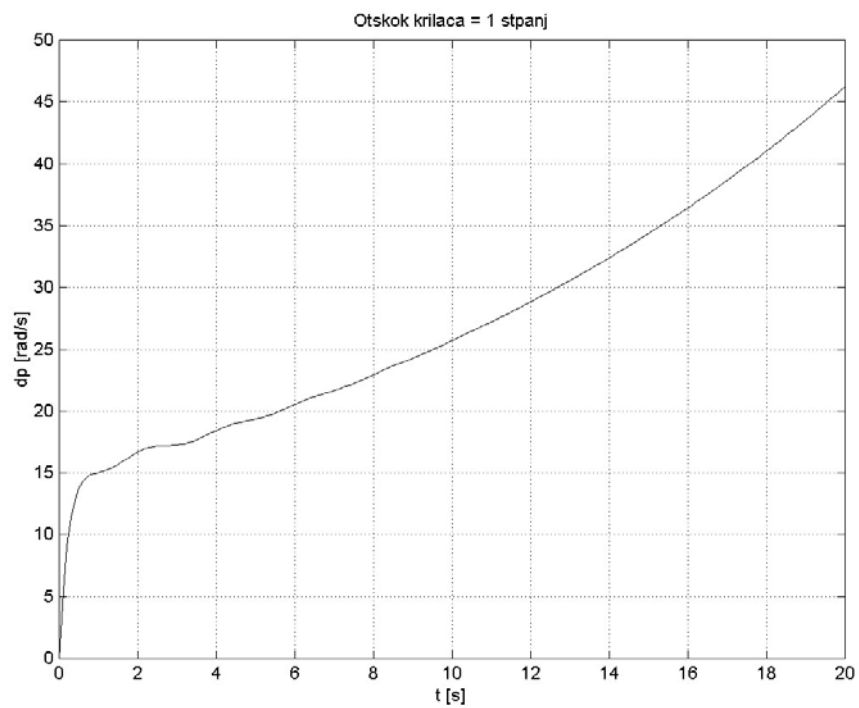
Slika 14-9  $\Delta\beta(t)$  za jedinični odskok kormila pravcaSlika 14-10  $\Delta p(t)$  za jedinični odskok kormila pravca



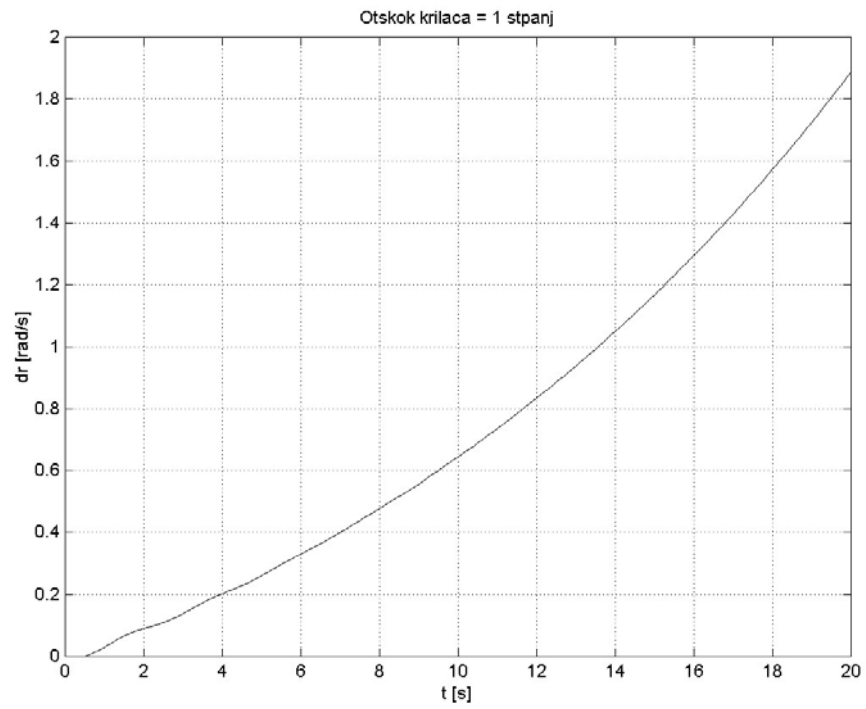
Slika 14-11  $\Delta r(t)$  za jedinični odskok kormila pravca



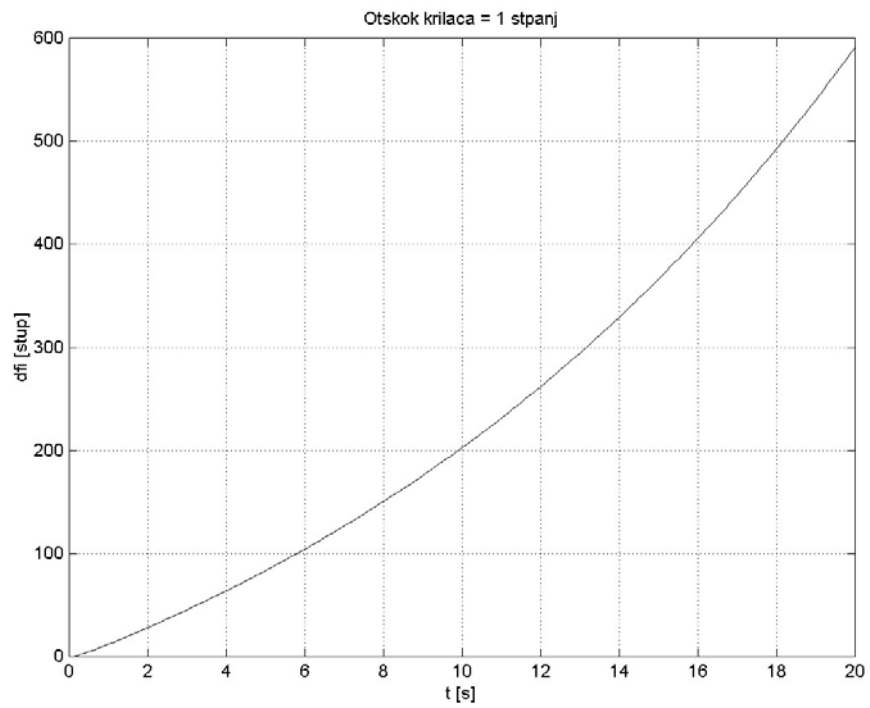
Slika 14-12  $\Delta\phi(t)$  za jedinični odskok kormila pravca

Slika 14-13  $\Delta\beta(t)$  zbog odskoka krilcaSlika 14-14  $\Delta p(t)$  zbog odskoka krilca





Slika 14-15  $\Delta r(t)$  zbog odskoka krilca



Slika 14-16  $\Delta\phi(t)$  zbog odskoka krilca

Iako odskok krilaca ne bi trebao utjecati na kut klizanja vidimo da se zbog njega ipak pojavio kut klizanja. Taj je kut vrlo mali tako da su posljedice male i spore, te ih pilot može bez teškoće otkloniti. Isto tako loša posljedica pozitivnog korijena je i pojava kutne brzina skretanja, koju pilot također može ručno poništiti. Međutim, odskok krilaca daje poslije prijelaznog procesa kutnu brzinu valjanja koja raste s vremenom, a ona uzrokuje kut valjanja koji još brže raste s vremenom. To znači da se ne može upravljati kutom valjanja. Očigledno je da se željeni kut valjanja ne može postaviti otklonom krilaca, kao što se to može učiniti s napadnim kutom otklonom kormila visine. U slučaju napadnog kuta, upravljački moment, stvoren otklonom kormila visine, povećava napadni kut, a s povećanjem napadnog kuta za statički stabilne letjelice stvara se suprotan moment (efekt opruge) koji uravnotežuje upravljački moment. I upravo u toj ravnoteži postizemo željeni napadni kut (ravnotežni napadni kut). To se ne može postići pri valjnju jer ne postoji moment valjanja koji je proporcionalan kutu valjnja i suprotnog smjera (efekta opruge). U valjanju postoji samo moment proporcionalan otklonu krilaca. Zbog toga direktnim otklonom krilaca ne možemo postaviti željeni kut valjanja.

## 14.5 Odgovor na harmonijski otklon kormilom pravca ili krilaca

Tražimo odgovor letjelice na harmonijski otklon kormila pravca  $\Delta\delta_n(t) = e^{i\omega t}$  ili krilaca  $\Delta\delta_\ell(t) = e^{i\omega t}$ . U oba slučaja Laplace-ovu transformaciju ove pobude je

$$\frac{1}{s - i\omega}$$

pa su poremećaji bočnog gibanja

$$\Delta\mathbf{X}(s) = \frac{\mathbf{G}(s)}{s - i\omega}.$$

s tim da uzmemo odgovarajući set prijenosnih funkcija po kormilu pravca ili krilaca. U realnom vremenu poremećaji bočnog gibanja bit će određeni inverznom Laplace-ovom transformacijom

$$\Delta\mathbf{X}(t) = L^{-1} \left[ \frac{\mathbf{N}(s)}{(s - i\omega) \cdot D(s)} \right].$$

u kojoj opet trebamo uzeti odgovarajuće polinome  $\mathbf{N}_{\delta_n}(s)$  za slučaj otklona kormila pravca, odnosno  $\mathbf{N}_{\delta_\ell}(s)$  u slučaju otklona krilaca.

Polinom u nazivniku  $(s-i\omega)\cdot D(s)$  petoga je reda i ima četiri korijena ista kao i karakteristični polinom bočnog gibanja  $D(s)$ , a peti korijen je  $s=i\omega$ . Primjenom Heavisideova teorema razvoja dobivamo:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{X}(t) = & \frac{\mathbf{N}(s_1)}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)(s_1-s_4)(s_1-i\omega)} e^{s_1 t} + \frac{\mathbf{N}(s_2)}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)(s_2-s_4)(s_2-i\omega)} e^{s_2 t} + \\ & + \frac{\mathbf{N}(s_3)}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)(s_3-s_4)(s_3-i\omega)} e^{s_3 t} + \frac{\mathbf{N}(s_4)}{(s_4-s_1)(s_4-s_2)(s_4-s_3)(s_4-i\omega)} e^{s_4 t} + \\ & + \frac{\mathbf{N}(i\omega)}{(i\omega-s_1)(i\omega-s_2)(i\omega-s_3)(i\omega-s_4)} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

14.33

Od četiri korijena karakteristične jednadžbe bočnog gibanja, jedan je realan i pozitivan i zbog toga jedan od prvih četiri člana na desnoj strani tijekom vremena raste, dok tri iščezavaju (aperiodični mod i Dutch mod). Peti član

$$\Delta \mathbf{X}(t) = \frac{\mathbf{N}(i\omega)}{(i\omega-s_1)(i\omega-s_2)(i\omega-s_3)(i\omega-s_4)} e^{i\omega t}$$

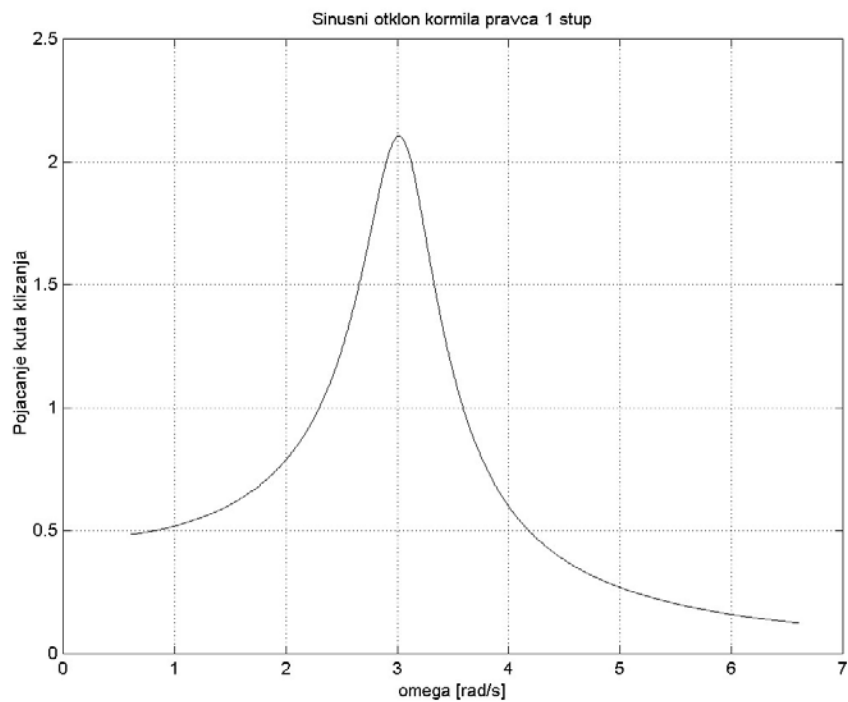
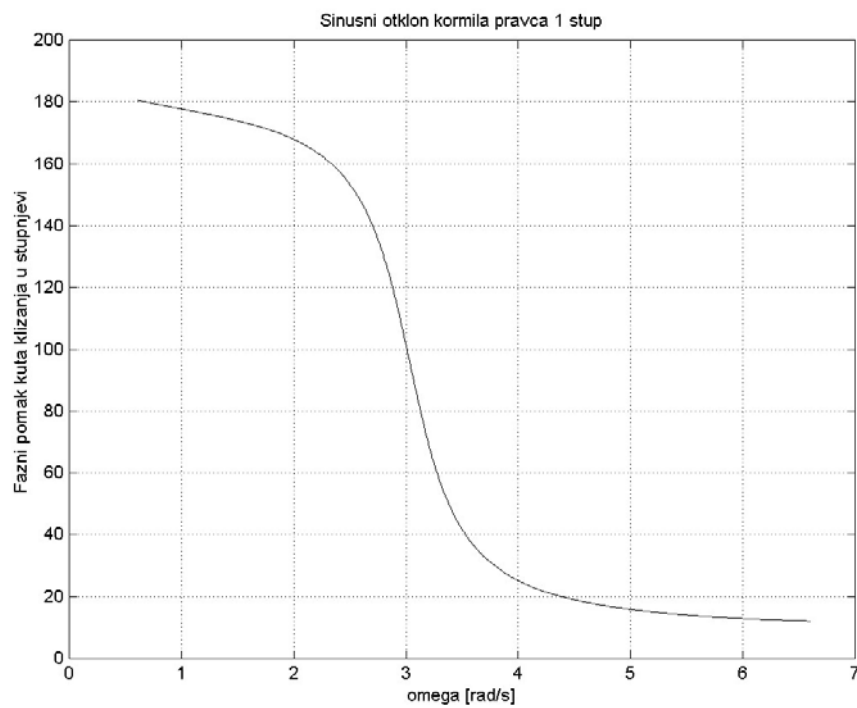
predstavlja mod bočnog gibanja zbog harmonijskog otklona kormila pravca. Kompleksna amplituda ovog moda može se prikazati u obliku trigonometrijskog broja, pa taj mod ima oblik

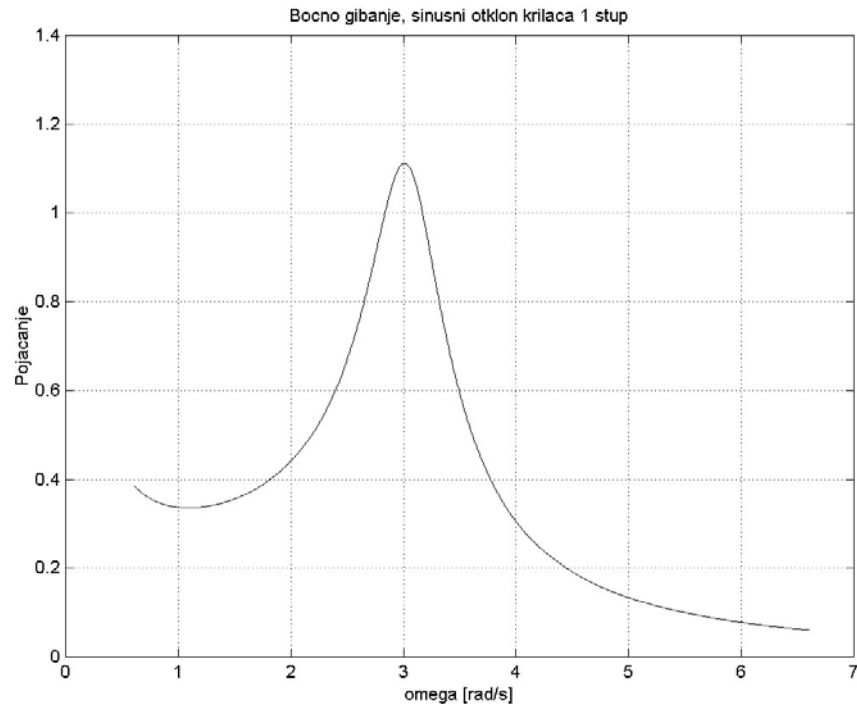
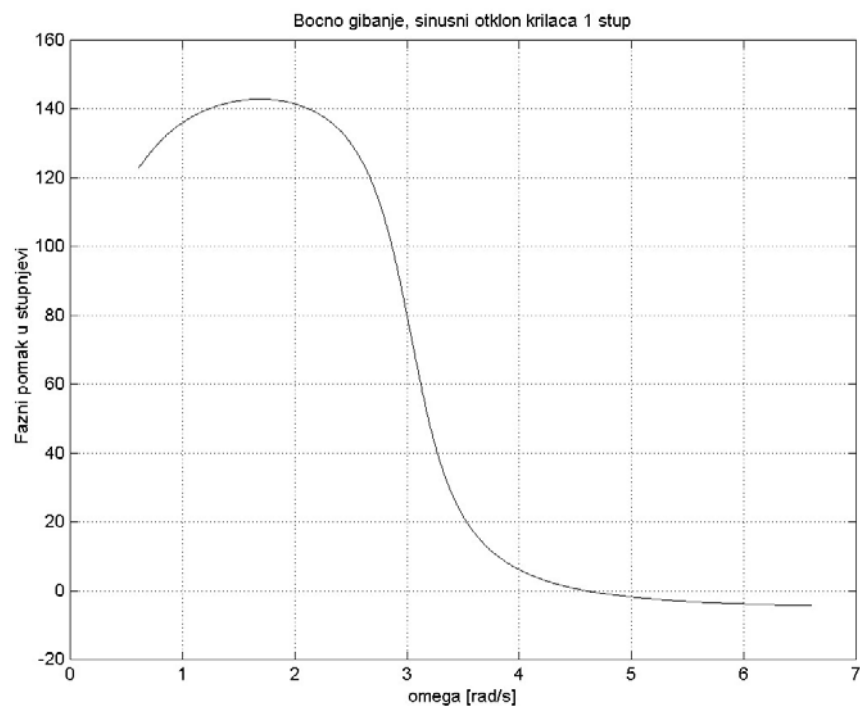
$$K(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)+i\omega t} \quad 14.34$$

Taj mod bit će u svakoj varijabli bočnog poremećaja. Vidimo da je on također harmonijska funkcija. Njegova amplituda ovisi o kutnoj brzini pobude, a periodičnost moda ima vremenski pomak unaprijed za kut također u funkciji kutne brzine. Pri tome svaka varijabla bočnog gibanja ima svoje funkcije  $K(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$ . Zato što je amplituda pobude bila jedinična, amplituda  $K(\omega)$  predstavlja pojačanje amplitude u odgovoru.

### 14.5.1 Primjer

Za mali zrakoplov pomoću programa *odziv.m*, koji se nalazi u direktoriju *Dinamička stabilnost \vocna* na CD-u, nacrtane su na slikama 14-17 i 14-18 funkcije  $K(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$  za kut skretanja ( $m=1$ ). Na tim slikama vidimo da i ovdje postoji rezonanca u području periode Dutch moda. Rezonanca postoji i na otklon kormila pravca i na otklon krilaca, ali je dva puta veća na otklon kormila pravca. Međutim pri analizi uzdužnog gibanja rezonanca napadnog kuta na otklon kormila visine bila je znatno veća.

Slika 14-17 Pojačanje kuta klizanja  $K(\omega)$  u funkciji kutne brzine pobude kormila pravcaSlika 14-18 Pomak kuta klizanja  $\varphi(\omega)$  u funkciji kutne brzine kormila pravca

Slika 14-19 Pojaćanje kuta  $K(\omega)$  klizanja na otklon krilcaSlika 14-20 Fazni pomak kuta klizanja  $\varphi(\omega)$  na otklon krilca

Tamo je maksimalno pojačanje mali zrakoplov bilo reda veličine 45, dok je ovdje maksimalno pojačanje za otklon kormila pravca oko 2.1, a za otklon krilaca 1.1.

## 14.6 Ocjena kvalitete direktnog upravljanja bočnog gibanja

Prvi kriterij odnosi se na ocjenu aperiodičnog moda (mod koji odgovara realnom negativnom korijenu) upotrebljava se parametar *vremenska konstanta*. Kada je realni koren negativan, recipročna vrijednost s promijenjenim predznakom korijena naziva se *vremenska konstanta moda*. Ona pokazuje koliko brzo iščezava aperiodičan mod.

Tablica 14-1

Maksimalna vremenska konstanta $\tau_{\max}$				
Kategorija leta	Klasa zrakoplova	Razina kvalitete		
		1	2	3
A	I, IV	1.0	1.4	10
	II, III	1.4	3.0	10
B	svi	1.4	3.0	10
C	I, II-C, IV	1.0	1.4	10
	II-L, III	1.4	3.0	10

U tablici 14-1 dane su prema [14, 17], dopuštene maksimalne vrijednosti za *vremensku konstantu* moda. Te vrijednosti ovise ne samo o kategoriji letova (A, B i C vidi 13.7) već i o klasifikaciji zrakoplova. Zrakoplovi se svrstavaju u četiri klase, s tim da se druga klasa dijeli još u dvije pod klase:

- prvu klasu čine mali laki zrakoplovi;
- drugu klasu čine zrakoplovi srednje težine i srednje manevarske sposobnosti koji se dijele u dvije pod klase:
  - II-C (*carrier operation*)
  - II-L (*land operation*)
- u trećoj klasi su teški zrakoplovi male do srednje manevarske sposobnosti;
- četvrtu klasu čine zrakoplovi velike manevarske sposobnosti.

Drugi kriterij kvalitete bočnog gibanja odnosi se na Duch mod (gušeno harmonijsko gibanje) od kompleksno konjugiranih korijena. Ovisno o kategoriji leta, razini kvalitete i klasi zrakoplova zahtijevaju se tri uvjeta:

- prvi uvjet  $\delta_{\min}$
- drugi uvjet  $\omega_{n \min} = \left(\sqrt{\delta^2 + \omega^2}\right)_{\min}$
- treći uvjet  $\zeta_{\min}$

Pregled ovih minimalnih vrijednosti dat je u tablici 14-2.

Tablica 14-2

Minimalni uvjeti za Duch mod					
Razina kvalitete	Kategorija leta	Klasa zrakoplova	$\delta_{\min}$	$\omega_{n \min}$	$\zeta_{\min}$
1	A	I, IV	0.35	1.0	0.19
		II, III	0.35	0.4	0.19
	B	svi	0.15	1.0	0.08
	C	I, II-C, IV	0.15	1.0	0.08
		II-L, III	0.15	0.4	0.08
2	sve	svi	0.05	0.4	0.02
3	sve	svi	-	0.4	0.02

Konačno treći kriterij se odnosi na spiralni mod (mod od pozitivnog realnog korijena), tj. onaj koji je nestabilan. Jasno je da on mora imati propisano minimalno vrijeme za koje će udvostruči amplitudu. Te propisane vrijednosti za vrijeme udvostručenja amplitude dane su u tablici 14-3 za razne razine kvalitete ovisno o klasi zrakoplova i kategoriji leta .

Tablica 14-3

Minimalno vrijeme udvostručavanja $t_{2 \min}$				
Klasa zrakoplova	Kategorija leta	Razina kvalitete		
		1	2	3
I i IV	A	12	12	4.0
	B i C	20	12	4.0
II i III	svi	20	12	4.0

### 14.6.1 Primjer

Vremenska konstanta aperiodičnog moda iznosi

$$\tau = \frac{1}{-s_1} = \frac{1}{4.232} = 0.236$$

Prema postavljenom kriteriju, ova je vrijednost znatno ispod postavljene granice  $\tau_{\max} = 1.00$  za letove A s prvom klasom i najboljom kvalitetom zrakoplova. To je slučaj

Tri uvjeta za Dutch mod

Apsolutnu vrijednost realnog dijela korijena

$$\delta = 0.339,$$

a prema kriterijima za letove A realni dio korena treba biti veći od 0.35 za prvu klasu zrakoplova. Znači da mali zrakoplov ne udovoljava tom uvjetu.

Modul korijena je

$$\sqrt{\delta^2 + \omega^2} = \sqrt{0.339^2 + 3.033^2} = 3.05,$$

a prema kriteriju on treba biti veći od 1, što je zadovoljeno

Faktor gušenja

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} = \frac{0.339}{3.05} = 0.111$$

a prema kriteriju za letove A za zrakoplove prve klase taj faktor treba biti veći od 0.19. Ni ovdje mali zrakoplov ne udovoljava tom zahtjevu

Međutim, za letove B, mali zrakoplov udovoljava sva tri uvjete za prvu klasu.

Konačno, spiralni mod (onaj koji je nestabilan, zbog realnog pozitivnog korijena) ima vremensku konstantu

$$t = \frac{\ln 2}{s_4} = \frac{\ln 2}{0.0634} = 10.9$$

što je iznad propisanog minimuma 12 s. na letovima A za prvu klasu zrakoplova.

Time smo provjerili uvjete samo u slučaju kada je masa maskisimalna, a režim leta odgovara najvećem doletu. Potrebno je provjeriti ove uvjete i za druge slučajeve. Zato smo napravili program u MATLAB-u koji se zove *uvjeti.m* nalazi se na CD-u u direktoriju *Dinamička stabilnost\bocna*. Taj program provjerava sve ove uvjete od maksimalne mase (četiri člana posade, puni spremnici goriva i najveća dozvoljena prtljaga) do minimalne mase (prazan zrakoplov). Dijagrami dobiveni programom pokazuju da se u cijelom intervalu od maksimalne do minimalne mase rezultati isti kao za maksimalnu masu.