

Mehanika kompozitnih materijala

Ivica Smojver

Zagreb, ver. 06/2007

Ovaj se materijal može koristiti isključivo u nastavne svrhe na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu i ne smije se, bilo u dijelovima ili u cjelovitoj formi, koristiti u druge svrhe bez suglasnosti autora.

Sadržaj

1	Uvod	5
1.1	Osnovni pojmovi	5
1.2	Vlakna	5
1.3	Matrice	9
2	Tenzori elastičnosti i podatljivosti	14
2.1	Tenzor elastičnosti za različite materijale	14
2.2	Promjena elastičnih konstanti kompozitnog materijala s promjenom orientacije vlakana	25
3	Mikromehanika	29
3.1	Izrazi dobiveni pravilom mješavina	29
3.1.1	Slučaj jednolike deformacije u vlaknu i matrici uz jednoosno stanje naprezanja	30
4	Makromehanika kompozita	32
4.1	Veza između inženjerskih konstanti i matrice elastičnosti	33
4.2	Izvod simetrije tenzora elastičnosti i podatljivosti	33
4.3	Analiza laminata - definiranje sila i momenata	35
4.4	Konstitutivna jednadžba višeslojnih kompozita	37
4.5	Kriteriji popuštanja kompozita	46
4.5.1	Kriterij maksimalnog naprezanja	48
4.5.2	Kriterij maksimalnih deformacija	49
4.5.3	Tsai-Hill Kriterij	51
4.5.4	Tsai-Wu Kriterij	52
5	Mehanički utjecaj promjene vlage i temperature	60
5.1	Toplinska naprezanja i deformacije	60
5.2	Naprezanja i deformacije uslijed promjene sadržaja vlage	62
5.3	Utjecaj promjene temperature i sadržaja vlage kod laminata u ravninskom stanju naprezanja	62
5.4	Sile i momenti uslijed promjene temperature i sadržaja vlage	65

Popis oznaka

$\bar{\mathbf{A}}$	istezna krutost
a_{ij}	kosinus kuta između nove osi \bar{x}_i i stare osi x_j
\mathbf{B}	spregnuta krutost
$C_{ij}; C_{ijkl}; \mathbf{C}$	tenzor elastičnosti (krutosti)
\bar{C}_{ijkl}	tenzor elastičnosti u novom (zarotiranom) koordinatnom sustavu
\mathbf{D}	svojna krutost
e	suma duljinskih deformacija
E_i	modul elastičnosti u pravcu glavne materijalne osi i
F_i, F_{ij}	parametri čvrstoće korišteni u Tsai-Wu kriteriju
G_{ij}	modul smicanja u koordinatnom sustavu (x_i, x_j)
h_k, h_{k-1}	vrijednosti u smjeru osi z koje određuju položaj k -tog sloja
N, M	vektori sila i momenata u kompozitu
N_x, N_y, N_{xy}	rezultantne sile u kompozitu
M_x, M_y, M_{xy}	rezultantni momenti u kompozitu
N^t, M^t	vektor sila odnosno momenata uslijed promjene temperature
N^v, M^v	vektor sila odnosno momenata uslijed promjene sadržaja vlage
\mathbf{Q}	reducirana matrica elastičnosti
$\bar{\mathbf{Q}}$	reducirana matrica elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu
$\bar{\mathbf{Q}}_k$	reducirana matrica elastičnosti k -tog sloja
S	smična čvrstoća
S_ε	dopuštena kutna deformacija
$S_{ij}; S_{ijkl}; \mathbf{S}$	tenzor podatljivosti
$\bar{\mathbf{S}}$	reducirana matrica podatljivosti u globalnom koordinatnom sustavu
\mathbf{T}_σ	matrica transformacija za naprezanja
\mathbf{T}_ε	matrica transformacija za deformacije
$u_0(x, y), v_0(x, y)$	pomaci srednje površine višeslojnog kompozita
$U; W$	gustoća energije deformiranja
$X_t; X$	vlačna čvrstoća u pravcu vlakna
$X_c; X'$	tlačna čvrstoća u pravcu vlakna
$X_{\varepsilon t}$	dopuštena vlačna deformacija u pravcu vlakna
$X_{\varepsilon c}$	dopuštena tlačna deformacija u pravcu vlakna
$Y_t; Y$	vlačna čvrstoća u ravnini sloja okomito na pravac vlakna
$Y_c; Y'$	tlačna čvrstoća u ravnini sloja okomito na pravac vlakna
$Y_{\varepsilon t}$	dopuštena vlačna deformacija okomito na pravcu vlakna
$Y_{\varepsilon c}$	dopuštena tlačna deformacija okomito na pravcu vlakna
α_i	koeficijent linearnog toplinskog istezanja u pravcu osi i
β_i	koeficijent linearnog toplinskog istezanja u pravcu osi i uslijed promjene sadržaja vlage
δ_{ij}	Kroneckerova delta
ΔT	promjena temperature u °C ili K
ΔM	promjena sadržaja vlage u %
$\varepsilon_j; \varepsilon_{kl}; \varepsilon$	tenzor deformacija

$\varepsilon_{ i }$	vektor deformacija u glavnom materijalnom sustavu (1, 2, 3)
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$	deformacije srednje površine višeslojnog kompozita
ε_k	vektor deformacija u k -tom sloju
ε_i^t	slobodna toplinska deformacija u pravcu osi i
ε^m	vektor mehaničkih deformacija
ε	vektor ukupnih deformacija
ε^t	vektor toplinskih deformacija
ε_i^v	slobodna deformacija u pravcu osi i (zbog promjene sadržaja vlage)
$\varepsilon_{ x }$	vektor ukupnih deformacija u globalnom k.s.
$\varepsilon_{ x }^t$	vektor toplinskih deformacija u globalnom k.s.
$\varepsilon_{ x }^v$	vektor deformacija uslijed vlage u globalnom k.s.
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	zakrivljenost srednje površine
λ, μ	Laméove konstante za izotropni materijal
ν_{ij}	Poissonov koeficijent $-\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$
$\sigma_i; \sigma_{ij}; \sigma$	tenzor Cauchyevih naprezanja
$\sigma_{ x }$	vektor naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu (x, y, z)
$\sigma_{ i }$	vektor naprezanja u glavnom materijalnom sustavu (1, 2, 3)
σ_k	vektor naprezanja u k -tom sloju
$\bar{\sigma}_{ij}$	tenzor naprezanja u novom (zarotiranom) koordinatnom sustavu

1 Uvod

1.1 Osnovni pojmovi

Kompozitni materijali se sastoje od dva osnovna konstituenta: vlakna i matrice koji čine slojeve koji su međusobno povezani i tako čine višeslojni kompozit (laminat). Vlakna su osnovni nosivi element kompozita i daju mu čvrstoću, dok matrica drži vlakna zajedno, ima važnu funkciju u prijenosu opterećenja na vlakno, daje vanjsku formu kompozitu, definira njegovo ponašanje obzirom na djelovanje atmosfere itd. Vlakna su najčešće: ugljična, staklena, aramidna (npr. kevlar) i metalna, a najčešće čine 60 - 70 % volumnog udjela u kompozitu. Tablica 1 pokazuje osnovne karakteristike pojedinih vrsta vlakana. Matrice mogu biti polimerne, kako duromeri tako i plastomeri, zatim ugljične, metalne (takvi se kompoziti nazivaju MMC engl. *Metal Matrix Composites*), keramičke i dr. Treba naglasiti da vlakna pored uobičajene konfiguracije dugih vlakana, mogu biti i kratka vlakna, *whiskers*, sfere i dr. *Whiskers* su kratka vlakna, izrazito velike čvrstoće, promjera do 10 μm i duljine do 0.1 m. Njihova čvrstoća teoretski može iznositi i do 1/10 modula elastičnosti. Posebnu vrstu kompozita čini prepreg (ime dolazi od engl. *PREImpREGnated*) kod kojih su pletena vlakna natopljena matricom (najčešće polimernom). Prepreg se u pravilu koristi za proizvodnju kompozitnih komponenti u autoklavu. Ova je tehnologija vrlo zastupljena kod proizvodnje kompozitnih dijelova avionske konstrukcije. Danas se sve više govori o nanokompozitima kao posebnoj vrsti kompozitnih materijala. Radi se o ugljičnim nanocijevima kod kojih su dvodimenzionalne bazalne ravnine savijene u oblik cijevi, a oblik im ovisi o načinu na koji su savijene, tako da mogu biti s jednom ili više stjenki. Nanocijevi su dugačke do 10 μm i imaju iznimnu čvrstoću i krutost. U laboratorijskim uvjetima postignut je modul elastičnosti od preko 1 TPa, te čvrstoća od više od 100 GPa. Ove vrijednosti znatno opadaju u slučaju pojave nečistoća u materijalu. Danas je osnovni problem njihove primjene vrlo skupa proizvodnja te nemogućnost proizvodnje u inženjerski potrebnim količinama. Iako su danas nanokompoziti još vrlo daleko od praktične primjene u stvarnim konstrukcijama, zasigurno se radi o materijalima budućnosti i te su stoga danas predmet vrlo intenzivnih istraživanja.

1.2 Vlakna

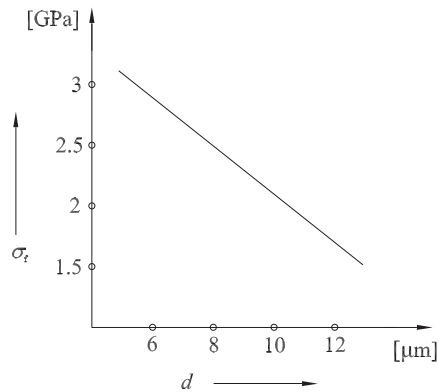
Visoka mehanička svojstva vlakana rezultat su snažnih međuatomarnih sila koje vladaju u materijalima niskog atomskog broja i male gustoće (npr. C, B, Al, Si). Vlakna mogu biti napravljena ili samo od tih elemenata, zatim od njihovih međusobnih spojeva, ili spojeva s kisikom i dušikom. Kod ovih materijala nije izraženo plastično tečenje, kao npr. kod metala, već se lom događa uslijed integralnog efekta djelovanja mikroskopskih pukotina, čiji se broj smanjuje što su manje dimenzije vlakna (poprečni presjek u odnosu na duljinu, vidi Sl.1). Materijal u vlaknastoj formi, stoga, ima vrlo mali volumen po metru duljine, te je vjerojatnost pojave pukotine obrnuto proporcionalna volumenu materijala (prema Weibullovoj raspodjeli). S druge strane, kod ovakvog je materijala znatno više izraženo odstupanje svojstava od referentnih vrijednosti. Ova neujednačenost mehaničkih svojstava predstavlja velik problem pri proračunu i izradi kompozitnih konstrukcija. Broj mikroskopskih pukotina može biti znatno smanjen tehnologijom izrade

Tablica 1: Mehanička svojstva materijala vlakana

tip vlakna	d [μm]	ρ [kg/m^3]	E [GPa]	σ_v [GPa]	ε [%]	α_1 [$10^{-6}/^\circ\text{C}$]	α_2 [$10^{-6}/^\circ\text{C}$]
PAN - IM	9	1800	276	2.93	1.0	-0.5	12
PAN - HM	10	1900	400	2.9	0.5	-1.2	12
PAN - UHM	10	1860	517	1.72	0.4	-1.0	-
Pitch	11	2020	345	1.72	0.9	-1.6	7.8
Rayon	6.5	1660	41-393	0.62-2.2	2.5	-	-
E - staklo	14	2540	72.4	3.45	3.2	5.0	5.0
C - staklo	-	2490	69	3.16	4.8	7.2	7.2
S - staklo	10	2490	85.5	4.59	5.7	5.6	5.6
Kevlar-29	12	1440	62	2.76	4	-2	59
Kevlar-49	12	1479	131	3.79	2.8	-2	59
Polietilen	38	970	117	2.58	5	-	-
Čelik s 0.9 %C	100	7800	210	4.25	-	11.8	-
Berilij	-	1850	300	1.26	-	11.6	-
Volfram	25	19300	360	3.85	-	4.5	-
SiC	100-200	3300	430	3.5	-	5.7	-
Al ₂ O ₃	20	3950	379	1.4	-	7.5	-
Bor	100-200	2600	385	3.8	-	8.3	-

Tablica 2: Mehanička svojstva materijala matrice

tip matrice	ρ [kg/m^3]	E [GPa]	G [GPa]	σ_v [MPa]	ε [%]	α [$10^{-6}/^\circ\text{C}$]	T_g [$^\circ\text{C}$]
Poliester	1500	4.5	2	90	5	200	110
Vinil ester	1150	4	-	90	5	53	150
Epoksi	1400	6	2.2	130	8.5	70	250
Bizmaleimid	1320	3.6	1.8	78	6.6	49	300
Poliimid	1890	4.9	-	120	3	90	320
Polieter imid	1270	3	-	105	60	62	217
Poliamid imid	1400	5	-	95-185	12-18	36	240 - 270
PPS	1340	3.3	-	70-75	3	54-110	85
PEEK	1320	-	-	92-100	150	-	143
Polisulfon (PS)	1240	2.5	-	70-75	50-100	56-100	190
Polipropilen (PP)	900	1-1.4	-	25-38	300	110	-20 - -5
Polikarbonat (PC)	1200	2.4	-	45-70	50-100	70	133
Aluminij	2700	70	-	200	-	-	-
Ti-6Al-4V	4500	110	-	1000	-	-	-
borosilikatno staklo	2300	60	-	100	-	3.5	-
MgO	3600	210-300	-	97-130	-	13.8	-
Al ₂ O ₃	4000	360-400	-	250-300	-	8.5	-
SiC	3200	400-440	-	310	-	4.8	-



Slika 1: Utjecaj promjera vlakna d na čvrstoću σ_f

vlakna (gdje je od posebne važnosti čistoća sirovine od koje je vlakno napravljeno) ili zaštitnom presvlakom oko vlakna. Npr. brzina taloženja molekula i brzina hlađenja imaju znatan utjecaj na strukturu vlakna, pri čemu vrlo velike brzine hlađenja daju vrlo finu molekularnu strukturu koja se ne može postići kod materijala u nevlaknastoj formi. Nadalje, postupci koji u sebi uključuju izvlačenje ili vučenje, zbog vlačnih naprezanja u vlaknu imaju pozitivan utjecaj na usmjerenost kristala ili atomarne strukture u pravcu vlakana. Danas su zasigurno ugljična (karbonska) vlakna najrasprostranjenija, posebice kod mehanički najopterećenijih avionskih konstrukcija. Treba naglasiti da je pogrešno nazivati ugljična vlakna grafitnim - grafit je jedan od oblika ugljika, kod kojeg su snažnim kovalentnim vezama povezane heksagonalne bazalne ravnine, dok je trodimenzionalna struktura postignuta njihovim međusobnim povezivanjem slabim Van der Waalsovima silama. Upravo ove sile omogućuju lako klizanje bazalnih ravnina jedne prema drugoj, što je i razlog zašto grafit ima svojstvo podmazivanja odnosno smanjivanja trenja. Za razliku od grafita, ugljična vlakna imaju samo dvodimenzionalnu strukturu. Prva ugljična vlakna bila su napravljena iz rayona, no postupak je ubrzo izbačen zbog malog postotka ugljika koji se na taj način dobivao, kao i slabih mehaničkih svojstava. Većina ugljičnih vlakana koja se koriste u avionskim i drugim konstrukcijama su napravljena iz poliakrilonitril (PAN) vlakana ili iz različitih smola (engl. *pitch*) procesom karbonizacije, pri čemu se postupci proizvodnje mogu značajno razlikovati. PAN postupkom se proizvode vlakna s postotkom C do 50 % dok se vlakna iz smole odlikuju postotkom C do 80 %. Prema osnovnim mehaničkim karakteristikama, ugljična se vlakna klasificiraju kao HM (visokog modula elastičnosti), HS (visoke čvrstoće) i IM (umjerenog modula elastičnosti) - ponekad se koristi i oznaka UHM (vrlo visoki modul elastičnosti). Vlakna dobivena iz smole generalno imaju veći modul elastičnosti, ali i manju tlačnu i vlačnu čvrstoću u odnosu na PAN vlakna. Ova su vlakna i znatno više porozna, što dodatno utječe na njihovu čvrstoću. Vlakna od smole mogu imati i dobru električnu vodljivost, prosječnog su promjera 10-11 μm , za razliku od PAN vlakana promjera 5-10 μm . U poprečnom presjeku, ugljična vlakna mogu imati radijalni oblik (bazalne ravnine su radijalno usmjerene), oblik koncentričnih slojeva (bazalne ravnine koncentrične), transverzalno izotropni ili jezgru i vanjsku ljusku (najčešći oblik, karakterističan za PAN vlakna).

Staklena se vlakna proizvode najčešće od silike (silicijevog dioksida SiO_2) različitim postupcima i u pravilu imaju slabija mehanička svojstva od ugljičnih vlakana. No vrlo su raširena u primjeni kod mehanički manje zahtjevnih konstrukcija zbog njihove manje cijene. Mogu se znatno razlikovati po svojstvima te se stoga označavaju kao A-staklo (ovakva su bila prva proizvedena vlakna, danas se vrlo rijetko koriste), C-staklo (koriste se zbog poboljšane otpornosti na kiseline i lužine), E-staklo (najčešće korišteno, poboljšana otpornost na vlagu i blaže kemikalije), S-staklo (povećane čvrstoće i modula elastičnosti, koriste se kod mehanički opterećenijih konstrukcija gdje su potrebni visoka specifična krutost i čvrstoća).

Polimerna vlakna su jedina od nabrojanih koja su u potpunosti sintetski stvorena. Među njima su najpoznatija Kevlarska vlakna, a u posljednje vrijeme se koriste i poliimidi zbog mogućnosti korištenja i na povišenim temperaturama (i preko $300\text{ }^\circ\text{C}$). Polimerna vlakna se sastoje od polimernih lanaca koji se posebnim postupcima izdužuju u pravcu pružanja vlakna. Njihova svojstva su izravna posljedica njihove mikrostrukture. Budući da polimerne molekule stvaraju ravninske površine velike krutosti, koje su međusobno povezane slabim vodikovim vezama, čitav je izgled vlakna vrlo sličan onom radijalnog rasporeda kod ugljičnog vlakna. Stoga Kevlarska vlakna imaju nizak modul smicanja u uzdužnom smjeru, slaba svojstva u poprečnom smjeru kao i malu uzdužnu tlačnu čvrstoću, zbog slabih vodikovih veza među ravninama. S druge strane odlikuju ih dobra uzdužna vlačna čvrstoća, dobra kemijska otpornost te mala gustoća.

Posebnu skupinu čine borova (engl. *boron*) vlakna. Ovo su sama po sebi kompozitna vlakna budući je posebnim postupkom napanjanja bor nanešen na osnovno ugljično (izrađeno iz smole) ili volframovo vlakno. Borova vlakna imaju znatno veći promjer ($125 - 140\ \mu\text{m}$) u odnosu na druge vrste vlakana (npr. ugljično promjera $10\ \mu\text{m}$). Zbog vrlo visoke tvrdoće bora, ovi se kompoziti vrlo teško naknadno obrađuju (npr. bušenje provrta ili rezanje), što je uz visoku cijenu, glavni razlog što su ih u zrakoplovnim konstrukcijama u potpunosti istisnuli kompoziti s ugljičnim vlaknima. Borova su se vlakna koristila u nekim od prvih aviona u kojima su korišteni kompoziti (američki lovački avioni F-14 Tomcat, F-15 Eagle iz početka 1970-tih). Kasnije je bor korišten kao jedno od prvih vlakana u kompozitima s metalnom matricom (engl. *Metal Matrix Composites* - MMC), pri čemu je matrica aluminijska ili titanska.

Vlakna od silicijevog karbida proizvode se sličnim postupkom kao i borova vlakna - napanjanjem na jezgru od ugljikovog vlakna (engl. *Chemical Vapor Deposition* - CVD). Ova su vlakna posebno pogodna za ojačavanje metala (aluminijskih i titanskih legura) kao i ojačavanje keramike u formi vlakna od silicijeva karbida, silicijeva nitrida ili stakla. U drugom se obliku ova vlakna izrađuju od polimera koji sadrže silicij i ugljik, jedno od takvih vlakana poznato je pod trgovačkim imenom Nicalon ili u poboljšanoj verziji Hi-Nicalon. Ova vlakna imaju i svojstvo poluvodljivosti - otpor im je ovisan o količini nečistoća koje sadrže. Nicalon vlakna su znatno jeftinija nego vlakna proizvedena CVD postupkom ali nisu pogodna za primjene na povišenim temperaturama.

1.3 Matrice

Osnovne funkcije matrice jesu:

- prenošenje opterećenja na vlakno
- odvajanje vlakana jednih od drugih u svrhu sprečavanja širenja pukotina u materijalu
- formiranje vanjskog oblika kompozitne konstrukcije
- zaštita kompozita od utjecaja okoline

Svojstva matrice (Tablica 2) izrazito su važna za određivanje uzdužne tlačne čvrstoće, poprečne vlačne čvrstoće kao i međuslojne posmične čvrstoće i obično se kaže da su ova svojstva uvjetovana matricom. U zrakoplovnim konstrukcijama, matrica mora biti otporna i na pogonsko gorivo, hidrauličke fluide kao i različite kemikalije koje se koriste pri održavanju (npr. sredstva za skidanje boje). Za kompozite se traži da dobro podnose temperature do 150 °C, iznimno i do 200 °C. Svojstva matrice najčešće određuju i svojstva kompozita, kao i ograničenja u primjeni. U slučaju izloženosti kompozita kemijskim ili utjecajima okoline, matrica je ona koja je prva izložena smanjenju mehaničkih svojstava, te njena svojstva značajno određuju ponašanje kompozita. Vrlo je bitno fizikalno svojstvo temperatura prelaska u kruto stanje (engl. *glass transition temperature* - GTT) koja definira točku prelaska iz viskoznog u kruto stanje matrice. Ova temperatura bitno definira konačna svojstva matrice. Naime, pri upotrebi iznad GTT, svojstva matrice znatno se snižavaju. Vlaga u kompozitu (ponajviše matrici) znatno snižava GTT. Tehnologija izrade kompozita znatno utječe na njegova svojstva, jer mora osigurati dobru vezu vlakna i matrice kao i minimalan udjel šupljina ili pukotina u kompozitu.

Kad je riječ o polimerima, oni se dijele u dvije velika skupine: duromeri i plastomeri. Duromeri pri zagrijavanju stvaraju ireverzibilne kemijske veze među polimernim lancima koji su međusobno snažno umreženi. Pri ponovnom zagrijavanju, oni ne mijenjaju stanje, već ostaju kruti sve dok se pod djelovanjem visoke temperature potpuno ne razgrade. Ovo ukazuje i na velik problem pri njihovoj primjeni, koji je danas sve važniji: nije ih moguće reciklirati razmekšavanjem matrice već samo mehanički usitniti čime se dobijaju sitne granule koje u sebi sadrže i vlakna i matricu. Za razliku od njih, plastomeri imaju svojstvo da se pri hlađenju stvrdnjavaju, ali se pri ponovom zagrijavanju razmekšavaju te ih je moguće ponovno oblikovati. Ovo omogućuje popravljavanje dijelova koji su izrađeni od ovih kompozita, kao i njihovo djelimično recikliranje. Nadalje, kod plastomera je moguća određena kristaliničnost, dok su duromeri isključivo amorfni. Kristaliničnost je uzrokovana usmjerenošću lanaca. Oni dijelovi polimera (ili oni polimeri) koji su kristalinični imaju veću gustoću, ali i bolja mehanička svojstva i otpornost utjecaju otapala (što je uzrokovano smanjenom molekularnom aktivnošću, odnosno većom uređenošću molekula).

Duromeri su polimeri koji se najčešće koriste u proizvodnji kompozita zbog relativno niže cijene, niskih proizvodnih temperatura, niske viskoznosti pri proizvodnji te dobrog oplakivanja vlakna. Od njih, za kompozite visokih mehaničkih svojstava, u zrakoplovnim konstrukcijama najčešće su korištene epoksidne smole zbog lakog korištenja, niske cijene,

zbog svojih izvrsnih mehaničkih svojstava, dobre kemijske postojanosti, te zadržavanja dobrih mehaničkih svojstava i dimenzija pri povišenoj temperaturi i vlazi. Nadalje, dobro reagiraju (ostvaruju dobru adheziju) s većinom vrsta vlakana. Budući da pri proizvodnji prolaze kroz period vrlo niske viskoznosti, to im omogućava vrlo široke tehnike proizvodnje. Epoksidi su najčešće dvokompozitni, pri čemu se u procesu proizvodnje dodaje očvršćivač koji postaje sastavni dio strukture matrice. Nakon miješanja epoksida i očvršćivača, pod djelovanjem topline dolazi do skrutnjavanja što se događa nekoliko sati. Konačna svojstva epoksidne matrice pokazuju izrazitu krhkost, što dovodi do znatne osjetljivosti obzirom na pojavu pukotina. Da bi se poboljšala ova svojstva, kao i otpornost vlazi i toplinska stabilnost, danas se epoksidima dodaju elastomeri kao i drugi tipovi polimera. Druga vrst duromera koja se sve više koristi zbog otpornosti povišenim temperaturama jesu adicijski poliimidi. Među njima su najpoznatiji bismaleimidi (BMI) koji posjeduju dobre proizvodne karakteristike no glavni nedostatak im je povišena krhkost koja se može smanjiti dodavanjem odgovarajućih spojeva (npr. polisulfon, polieterimid i dr). Druge vrste ovih spojeva jesu PMR-15 poliimidi sa GTT od gotovo 300 °C. Cijanati su također duromeri koji su pogodni za primjenu na visokim temperaturama koji imaju GTT oko 290 °C. Odlikuju ih dobre karakteristike pri primjeni u vrućim i vlažnim uvjetima (nešto slabija od epoksidne smole) te visoka tvrdoća. Vrlo su često korišteni i nezasićeni poliesteri, najčešće u kombinaciji sa staklenim vlaknima. Predstavnik ovih polimera su vinil esteri koji su vrlo popularni zbog svoje cijene, otpornosti na vlagu te brzine i jednostavnosti u izradi kompozita.

Epoksidne smole spadaju u skupinu amorfnih plimera koje karakterizira pojava gumene (gel) faze na višim te staklaste faze na nižim temperaturama. Epoksidi koji polimeriziraju na sobnoj temperaturi pogodni su za korištenje na temperaturama do 50°C dok se ovisno o tipu otvrđivača ostale vrste epoksida obrađuju na temperaturama između 120 i 180°C. Kemijske reakcije koje se pri polimerizaciji događaju jesu egzotermne te upotreba velike količine otvrđivača (katalizatora) ili previsoka temperatura polimerizacije može dovesti do toplinske degradacije matrice, a time i samog kompozita. Ovo je razlog zbog kojeg se posebna pažnja mora posvetiti izradi kalupa, posebice ako se radi o debljim ili većim dijelovima. Da bi im se promijenila mehanička svojstva, epoksidima se mogu dodavati različite tvari u svrhu smanjenja viskoznosti prilikom obrade, povećanja lomnog produljenja uz smanjenje modula elastičnosti, poboljšanje otpornosti širenju pukotina, promjena gustoće i dr. Njihov je osnovni nedostatak inherentna krhkost popraćena velikom čvrstoćom što se često poboljšava dodavanjem plastomera. Glavne prednosti epoksida jesu mogućnost modificiranja svojstava prema postavljenim zahtjevima, mogućost kontrole žilavosti te laka i sigurna proizvodljivost zbog male količine štetnih tvari koje se pri tome oslobađaju, malo skupljanje, dobra kemijska otpornost te dobra dimenzijska i toplinska stabilnost. Glavni nedostaci jesu viša cijena proizvodnje u odnosu na npr. poliestere (posebice specijalne vrste epoksida koje se koriste u zrakoplovstvu), osjetljivost na vlagu, sporo polimeriziranje, mala otpornost nekim organskim spojevima (npr. organskim kiselinama i fenolima) te relativno niska najviša temperatura primjene.

Poliesterske smole također pripadaju duromerima, a proizvode se egzotermnim kemijskim reakcijama pri kojim se nezasićeni poliesteri miješaju s relativno malom količinom inicijalizatora (katalizatora). Kao kod epoksida, i ovdje materijal pri polimerizaciji prolazi iz tekuće, preko gel do krute faze. Glavne prednosti ovih materijala jesu mala početna viskoznost, mala cijena početnih sirovina, jednostavna proizvodnja te izvrsna otpornost

atmosferskim utjecajima. S druge strane, polimerizacija je vrlo egzotermna s visokim skupljanjem čime se u procesu proizvodnje unose značajna zaostala naprezanja, krhkost te slaba kemijska otpornost nekim spojevima (alkalima).

Vinil esteri su po svojstvima između epoksida i poliestera. Polimerizacija se događa na relativno niskim temperaturama (kao kod poliestera) a konačna svojstva daju dobru kemijsku otpornost kao kod epoksida uz jednostavnu proizvodnju te bolja mehanička svojstva i bolje veze između vlakna i matrice u odnosu na poliestere. Ovi materijali imaju znatno veće troškove proizvodnje nego poliesteri te znatno veće skupljanje u odnosu na epoksidge.

Fenolne smole nastaju polimerizacijom fenola uz pomoć npr. formaldehida pod posebnim uvjetima. Ovi polimeri iskazuju dobru otpornost visokim temperaturama kao i otpornost gorenju, koja je posljedica ablativnih svojstava ovih smola (pri gorenju izgaraju slojevi materijala određenom brzinom stvarajući sloj ugljika) što im i jest najveća prednost pri upotrebi. Nedostaci jesu visoki tlakovi pri proizvodnji potrebni za polimerizaciju kao i velik postotak šupljina što znatno snižava mehanička svojstva.

Bismaleimidi (BMI) su visoko umreženi polimeri, po proizvodnji vrlo slični epoksidima, iako mogu imati nižu viskoznost i bolje oplakivanje vlakana. GTT im je između 180 - 320°C dok je maksimalna temperatura pri kojoj se mogu koristiti do 150°C. Ovi su materijali izvorno krhki što se poboljšava pomoću aditiva. U odnosu na epoksidge, prednost im je znatno bolja toplinska stabilnost što je važno u zrakoplovnoj primjeni kod borbenih aviona visokih performansi koji lete velikim brzinama i na velikoj visini. Bizmaleimidi koji se koriste kod ovih konstrukcija imaju GTT oko 180°C, mada se ne preporuča njihovo korištenje na temperaturama iznad 125°C, posebice u uvjetima povećane vlage. Osnovni su nedostatak znatno viši troškovi proizvodnje u odnosu na epoksidge. Danas BMI kompoziti u zrakoplovnim konstrukcijama sve češće zamjenjuju kompozite s ugljičnom matricom.

Poliimidne smole imaju prednost vrlo visoke temperature primjene koju nema niti jedna druga vrsta polimera, budući da im je GTT između 200-400°C. Nadalje, ovisno o tehnologiji proizvodnje, mogu biti i duromeri (adicijski poliimidi), kao i plastomeri (kondenzacijski poliimidi). Procesi proizvodnje su često vrlo kompleksni jer uključuju visoke temperature i tlakove te zahtijevaju strogo praćenje parametara procesa kako ne bi došlo do stvaranja eksplozivnih tvari. Tehnologija proizvodnje uključuje korištenje preprega ili RTM (*resin transfer molding*). U zrakoplovnim konstrukcijama koriste se za kućišta mlaznih motora ili za konstruktivne elemente lovačkih aviona visokih performansi. Najkvalitetniji od ovih polimera imaju GTT veću od 270°C, procesnu temperaturu od preko 370°C, dugotrajnu toplinsku stabilnost i izvrsna mehanička svojstva. Osnovna prednost im je stabilnost i odlična mehanička svojstva na visokim temperaturama, visoka kvaliteta proizvedenih komponenti te otpornost većini kemikalija, dok je nedostatak cijena i složenost proizvodnje.

Cianatne smole polimeriziraju pomoću katalizatora relativno brzo pri temperaturama 170-250°C i s vrlo malim skupljanjem. Nakon polimerizacije, karakteristike su dobra čvrstoća i tvrdoća na povišenim temperaturama, vrlo malo upijanje vlage, iako dugotrajna izloženost vlazi uzrokuje smanjenje svojstava, što im predstavlja problem za korištenje u zrakoplovnim konstrukcijama. Ovi materijali se mogu miješati s epoksidima ili drugim duromerima kako bi se dobila poboljšana svojstva.

Plastomeri su najšire klasificirani kao amorfni i kristalinični, mada svi ispoljavaju kristaliničnost u većoj ili manjoj mjeri. Nadalje, kristalinični elastomeri pokazuju znatno bolju otpornost utjecajima goriva, hidrauličkih fluida i dr. u odnosu na amorfne. Amorfni plastomeri pokazuju veliku isprepletenost polimernih lanaca, a pri zagrijavanju te se veze raskidaju i polimer se ponaša kao viskozni fluid. Amorfni plastomeri su i u određenoj mjeri osjetljivi na otapala, te su znatno osjetljiviji na puzanje i zamorna oštećenja nego li kristalinični. Plastomeri su znatno manje skloni upijanju vlage, manje su osjetljivi na udarna oštećenja. Mogu se u ograničenoj mjeri popravljati ponovnim zagrijavanjem i zavarivati. No, temperature i pritisci na kojima polimeriziraju su znatno viši u odnosu na duromere.

Kristalinični plastomeri svojstvo kristaliničnosti posjeduju zbog veće ili manje usmjerenosti polimernih lanaca, mada kompletnu kristaliničnost nije moguće postići. Pri zagrijavanju, kristalinične se faze miješaju i matrica postaje amorfni, viskozni fluid. Ovi su polimerni u stvari semikristalinični budući da sadrže i kristaliničnu i amorfnu fazu. Proizvodni uvjeti bitno utječu na stupanj kristaliničnosti - što je veća brzina hlađenja kristaliničnost je manja. Poliketoni su grupa kristaliničnih plastomera koji imaju izvrsnu toplinsku otpornost. Među njima se ističu polieterketon (PEK), polieterketonketon (PEKK) te najčešće korišteni polietereterketon (PEEK). PEEK ima stupanj kristaliničnosti do 40%, dobra mehanička svojstva te otpornost prema otapalima i kiselinama s izuzetkom koncentrirane sumporne kiseline. Osnovni je nedostatak vrlo visoka cijena proizvodnje. Plastomeri mogu biti proizvedeni znatno brže jer povišenu temperaturu nije potrebno održavati dulje vrijeme. Neki od njih imaju znatno višu GTT te temperaturu primjene od epoksida ili bizmaleimida. Nadalje, kod plastomera je uočljivo tečenje i znatna deformacija pri lomu, te time i znatno veća žilavost. No, oni ispoljavaju i puzanje pri povišenim temperaturama i konstantnim opterećenjem.

Polifenilen sulfid (PPS) je visoko kristalinični polimer (stupanj kristaliničnosti do 60%) s odličnom toplinskom stabilnošću te kemijskom i vatro otpornošću što ga čini atraktivnim materijalom (i dopuštenim, prema FAA) za avionske interijere. Materijal zadržava dobra svojstva i na temperaturama do 200°C kada počinje postupno smanjivanje mehaničkih svojstava.

Polimeri bazirani na derivatima sulfona - polisulfon (PSU), polieter sulfon (PES) te poliaril sulfon (PAS) su amorfni, generalno dosta kemijski otporni, no ne svim otapalima, i imaju iznimno dobra svojstva na visokim temperaturama te vatro otpornost. Zadržavaju dobra mehanička svojstva i u uvjetima povišene temperature i vlage. Samogasivi su pri čemu se stvara vrlo mala količina dima.

Polieterimid (PEI) je amorfan elastomer visokih mehaničkih svojstava. Dimenziono je stabilan (zbog amorfne strukture), ima izraženo malo skupljanje te visoko izraženu izotropiju u usporedbi s većinom kristaliničnih polimera. Visoka GTT omogućava korištenje na temperaturama do 200°C. Kemijski je vrlo otporan na velik broj kemikalija te na atmosferske utjecaje. Primjenu mu ograničava vrlo velika viskoznost u rastopljenom stanju.

Mada su polimeri dominantni kao materijali matrice, u velikoj se mjeri koriste još i metali (tada se to nazivaju engl. *Metal Matrix Composites*- MMC) te keramika. Kompoziti s metalnom matricom se odlikuju iznimno dobrim mehaničkim svojstvima. Za matricu se koriste laki metali, kao i aluminij i njegove legure, magnezij, titanske legure i dr. Ovi kompoziti omogućuju korištenje na temperaturama višim od 700°C, no uz

vrlo visoku cijenu proizvodnje koja je uvjetovana iznimno kompliciranom tehnologijom izrade. Osnovni problem pri proizvodnji je kemijska (ne)kompatibilnost metalne matrice i vlakna zbog kemijskih reakcija među njima, što i sužava broj kombinacije vlakana i matrice koje je moguće kombinirati. Stoga su se za ojačavanje metalnih matrica najbolje pokazali SiC, Al₂O₃, te *Borsic* (borovo vlakno presvučeno silicijevim karbidom). Korištenje ugljičnih vlakana je vrlo ograničeno, obično na aluminijske i magnezijeve matrice, ako je izloženost visokim temperaturama minimalna.

2 Tenzori elastičnosti i podatljivosti

2.1 Tenzor elastičnosti za različite materijale

Vežu između komponenti Cauchyjevog tenzora naprezanja i tenzora deformacija daje tenzor elastičnosti C_{ij} . Ako se naprezanja i deformacije zapišu u obliku vektora, a tenzor elastičnosti u matricnom obliku, vrijedi

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon \quad (1)$$

Budući da su naprezanja i deformacije tenzori drugog reda, a elastičnost tenzor četvrtog reda, ovaj se izraz može zapisati i

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2)$$

Ako je tenzor naprezanja zapisan pomoću komponenti prema Voightovoj konvenciji koja definira redosljed komponenti tenzora naprezanja, te koristeći svojstvo simetrije tenzora

$$\sigma_{ij} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \ \sigma_{12}\}^T \quad (3)$$

te tenzor deformacija

$$\varepsilon_{kl} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{12}\}^T \quad (4)$$

vrijedi

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (5)$$

U najopćenitijoj formi, tenzor elastičnosti može se zapisati

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{1222} \\ & & C_{3333} & C_{2333} & C_{1333} & C_{1233} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{1223} \\ & sim. & & & C_{1313} & C_{1213} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (6)$$

No, vrlo se često koristi sažeti oblik, kod kojeg se tenzor naprezanja zapisuju

$$\sigma_i = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5 \ \sigma_6\}^T \quad (7)$$

Tenzor deformacija se u tom slučaju ne zapisuje pomoću tenzorskih već inženjerskih komponenti, te se umjesto ε_{23} , ε_{13} te ε_{12} koriste kutne deformacije γ_{23} , γ_{13} , γ_{12}

$$\varepsilon_j = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \gamma_{23} \ \gamma_{13} \ \gamma_{12}\}^T = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6\}^T \quad (8)$$

Tada se tenzor elastičnosti zapisuje u sažetom obliku

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (9)$$

te se konstitutivna jednadžba u sažetom obliku zapisuje

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (10)$$

Važno je primijetiti da su komponente tenzora elastičnosti C_{ij} ($j = 4, 5, 6$), 1/2 odgovarajućih komponenti istog tenzora kada je zapisan kao C_{ijkl} . C_{ijkl} je zapis tenzora četvrtog reda, koji bi imao 81 komponentu (tenzor n -tog reda ima 3^n komponenti). No, zbog simetrije tenzora deformacija, vrijedi

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (11)$$

Stoga se dvije konstante koje su uz članove ε_{kl} i ε_{lk} mogu prikazati jednom konstantom, čime se broj materijalnih konstanti smanjuje na 54. Nadalje, zbog simetrije tenzora naprezanja vrijedi

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (12)$$

te se broj materijalnih konstanti smanjuje za još 18, i ostaje ih 36. No, zbog simetrije samog tenzora elastičnosti, broj konstanti se smanjuje na konačnih 21, što je i maksimalni broj materijalnih konstanti koje opisuju ponašanje elastičnog materijala (takav se materijal naziva anizotropnim).

Simetrija tenzora elastičnosti dokazuje se na sljedeći način. Prema izrazu

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (13)$$

vrijedi

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} \quad (14)$$

Ako se uvede pojam gustoće energije deformiranja U , kako je definiran u osnovama nauke o čvrstoći, vrijedi

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (15)$$

Tada je

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \quad (16)$$

Ako se isti postupak provede za promijenjene ponovljene indekse, pri čemu se vrijednost izraza ne mijenja, vrijedi

$$\sigma_{kl} = C_{klij}\varepsilon_{ij} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij} \quad (18)$$

$$\sigma_{kl} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij} \quad (20)$$

Usporedbom izraza (16) i (20) te primjenom komutativnosti operatora deriviranja vidljivo je da vrijedi

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (21)$$

čime je i dokazana simetrija tenzora elastičnosti. Ovo svojstvo će biti iskorišteno pri izvodu izraza za gustoću energije deformiranja U . Iz izraza

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (22)$$

te

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (23)$$

vrijedi

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} \quad (24)$$

što se nakon zamjene ponovljenih indeksa može zapisati

$$dU = \sigma_{kl} d\varepsilon_{kl} = C_{klij} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} \quad (25)$$

Zbog simetrije tenzora elastičnosti, izraz (21), posljednji se izraz može zapisati

$$dU = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} \quad (26)$$

Zbrajanjem izraza (24) i (26) dobijen je izraz

$$2dU = C_{ijkl} (\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij}) = C_{ijkl} d(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}) \quad (27)$$

odnosno nakon integriranja

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (28)$$

Ako se definiraju dva općenita Kartezijeva desna koordinatna sustava (x_1, x_2, x_3) i $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, moguće je definirati veličinu a_{ij} kao kosinus kuta između osi \bar{x}_i i x_j

$$a_{ij} = \cos(\bar{x}_i, x_j) \quad (29)$$

Tada se izrazi za transformaciju komponenti tenzora drugog reda pri rotaciji iz koordinatnog sustava (x_1, x_2, x_3) u koordinatni sustav $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ zapisuju

$$\bar{\sigma}_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} \quad (30)$$

ili ako se radi o tenzoru četvrtog reda

$$\bar{C}_{ijkl} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} C_{pqrs} \quad (31)$$

Tenzor elastičnosti mora zadovoljiti određene uvjete i ima određena svojstva (od kojih su neka pokazana u prijašnjim analizama):

1. Tenzor je pozitivno definitan
2. Tenzor je simetričan
3. Svi dijagonalni elementi su pozitivni
4. Postoji inverzan tenzor $S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$ koji se naziva tenzor podatljivosti, a koji je također pozitivno definitan i simetričan; matrično se ovo zapisuje $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$

5. Determinanta matrice tenzora elastičnosti je pozitivna $\det \mathbf{C} > 0$ (matrica je nesingularna)
6. Sve kvadratne submatrice koje sadrže dijagonalne elemente (minore) su pozitivno definitne (sve gornje lijeve submatrice od \mathbf{C} reda $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \dots, 6 \times 6$) i imaju determinantu > 0

Ako je definirana ravnina elastične simetrije (x_1, x_2) , tada je normala na ravninu definirana s osi x_3 . Tada izrazi

$$\bar{x}_1 \equiv x_1, \quad \bar{x}_2 \equiv x_2, \quad \bar{x}_3 \equiv -x_3 \quad (32)$$

opisuju zrcaljenje obzirom na ovu ravninu. Treba primijetiti da ova transformacija ne opisuje rotaciju koordinatnog sustava, jer novi koordinatni sustav više nije desni - transformacija opisuje zrcaljenje oko ravnine (x_1, x_2) . Za slučaj elastične simetrije, mora vrijediti da tenzor elastičnosti ne mijenja vrijednosti komponenti (ne transformira se), odnosno

$$\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl} \quad (33)$$

ili zapisano preko izraza za transformaciju (31)

$$\bar{C}_{ijkl} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}C_{pqrs} \quad (34)$$

Pri ovoj transformaciji vrijedi $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = -1$, dok su svi ostali $a_{ij} = 0$. Tada transformacija komponente C_{1113} glasi

$$\bar{C}_{1113} = a_{11}a_{11}a_{11}a_{33}C_{1113} = -C_{1113} \quad (35)$$

Ovaj je uvjet moguće ispuniti samo ako je $C_{1113} = 0$. Također vrijedi

$$\bar{C}_{1333} = a_{11}a_{33}a_{33}a_{33}C_{1333} = -C_{1333} \quad (36)$$

što također vrijedi samo za $C_{1333} = 0$. Vrlo se lako dokazuje da će ovo biti slučaj za sve C_{ijkl} koji imaju neparan (u ovom slučaju 1 ili 3) broj indeksa 3. Stoga će kod ovakvog materijala sljedeće komponente tenzora elastičnosti imati vrijednost 0:

$$C_{1123} = C_{1113} = C_{2223} = C_{2213} = C_{2333} = C_{1333} = C_{1223} = C_{1213} = 0 \quad (37)$$

Ovakav se materijal naziva monoklinički (monoklini) i broj se elastičnih neovisnih konstanti smanjuje sa 21 na 13. Tenzor elastičnosti se zapisuje u punoj formi (ako su komponente tenzora naprezanja i deformacija u vektorskom obliku zapisani prema Voightovoj konvenciji)

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{1222} \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & C_{1233} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & 0 \\ & sim. & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (38)$$

ili u sažetom obliku

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Ako bi se isti postupak proveo i za ravninu elastične simetrije, (x_1, x_3) , kojoj je vektor normale x_2 , vrijedi

$$\bar{x}_1 \equiv x_1, \quad \bar{x}_2 \equiv -x_2, \quad \bar{x}_3 \equiv x_3 \quad (40)$$

Sada su članovi matrice transformacije $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 1$, dok su svi ostali $a_{ij} = 0$. Koristeći isti princip koji je primijenjen pri analizi monokliničkog materijala, lako se pokazuje da će svi članovi tenzora elastičnosti koji imaju neparan broj indeksa 2 biti jednaki nuli, npr:

$$\bar{C}_{1222} = a_{11}a_{22}a_{22}a_{22}C_{1222} = -C_{1222} = 0 \quad (41)$$

Članovi koji moraju biti jednaki nuli, a nisu već izjednačeni s nulom u prijašnjoj analizi ravnine elastične simetrije (x_1, x_2) , jesu:

$$C_{1112} = C_{1222} = C_{1233} = C_{2313} = 0 \quad (42)$$

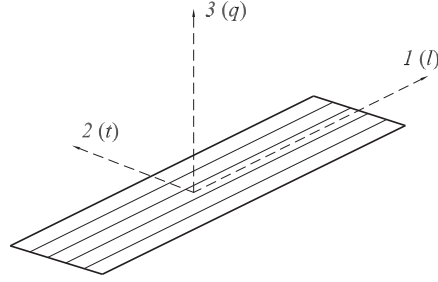
Broj neovisnih konstanti elastičnosti se smanjuje za još 4 i iznosi 9. Ako bi se izvršila ista analiza za ravninu elastične simetrije (x_2, x_3) , lako se uočava da nema dodatnih članova matrice elastičnosti koji su nula, a nisu već sadržani u prije navedena dva slučaja. Ovim se dokazuje da ako materijal ima dvije međusobno okomite ravnine elastične simetrije, nužno ima i treću, koja je okomita na te dvije. Ovakav se materijal naziva ortotropnim, i tenzor elastičnosti se zapisuje

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (43)$$

ili

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Primjer ortotropnog materijala predstavlja jedan kompozitni sloj, a slika 2 prikazuje standardno inženjersko označavanje izotropnog materijala, kod kojeg os $1 \equiv l$ označava



Slika 2: Označavanje osi ortotropnog materijala

pravac vlakna, os $2 \equiv t$ je u ravnini sloja okomito na pravac vlakna, a os $3 \equiv q$ čini desni koordinatni sustav s prve dvije osi.

Nadalje, ako je definirana ravnina (x_1, x_2) tako da je svaka ravnina okomita na nju ravnina elastične simetrije, takav se materijal naziva transversalno izotropan. Ova se ravnina naziva ravninom transversalne izotropije, dok se pravac x_3 naziva os transversalne izotropije. Transverzalno izotropni materijal predstavlja poseban slučaj ortotropnog materijala. Ako su definirane nove osi koje leže u ravnini okomitoj na x_3 , \bar{x}_1 koja zatvara kut θ s osi x_2 , te \bar{x}_2 koja zatvara isti kut s x_2 , tada je po definiciji ravnina (\bar{x}_1, \bar{x}_2) također ravnina elastične simetrije, te vrijedi

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 \\ \bar{x}_2 &= -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \\ \bar{x}_3 &= x_3\end{aligned}\tag{45}$$

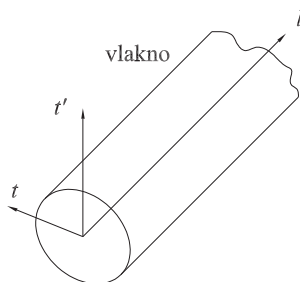
Nakon analize slične kao i kod monokliničkog materijala i sređivanja izraza (vidjeti npr. referencu [8] za detaljnu analizu svih pojedinih članova) tenzor elastičnosti se zapisuje

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1313} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1212}) \end{bmatrix}\tag{46}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}\tag{47}$$

Vidljivo je da je transversalno izotropan materijal opisan s 5 neovisnih elastičnih konstanti. Fizikalno, ovakav se materijal može razmatrati kao izotropan u ravnini elastične

simetrije, te sa svojstvima bitno drugačijim u pravcu transverzalne izotropije. U inženjerskoj primjeni, osi koje definiraju ravnine i pravce transverzalne izotropije imaju i posebne oznake - t, t', l , te bi za ovdje prikazan slučaj vrijedilo $\bar{x}_1 \equiv t$, $\bar{x}_2 \equiv t'$ te $\bar{x}_3 \equiv l$ (slika 3). Primjer transverzalno izotropnog materijala jest vlakno, razmatrano na mikronivou.



Slika 3: Oznake osi transverzalno izotropnog vlakna

Ako se razmatra materijal koji ima još jednu dodatnu os transverzalne izotropije, x_1 , tada je dodatna ravnina transverzalne izotropije (x_2, x_3) . Budući da u tom slučaju elastična svojstva moraju biti ista za pravce x_2 i x_3 , sljedeći preostali članovi tenzora elastičnosti moraju biti jednaki (koristeći izvorno označavanje članova tenzora za anizotropan materijal):

$$C_{2222} = C_{3333} \quad (48)$$

a budući je već od prije $C_{2222} = C_{1111}$, tada je i $C_{3333} = C_{1111}$. Nadalje mora vrijediti i

$$C_{1122} = C_{1133} \quad (49)$$

kao i

$$C_{1313} = C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \quad (50)$$

kako je već prije definirano za os transverzalne izotropije x_3 . Tenzor elastičnosti u matricnoj formi tada se zapisuje

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ & sim. & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix} \quad (51)$$

odnosno

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ & sim. & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (52)$$

Ako bi se ista analiza provela za os transverzalne izotropije x_2 , članovi u zapisu tenzora elastičnosti ne bi se promijenili, te stoga kažemo da ovakav materijal ima beskonačno mnogo ravnina elastične simetrije. Ovakav se materijal naziva izotropnim i ima ista elastična svojstva u svim smjerovima. Opisuju ga 2 neovisne konstante elastičnosti. Komponente tenzora elastičnosti se mogu prikazati i pomoću Laméovih konstanti λ i μ

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{11} = \lambda + 2\mu \\ C_{1212} &= C_{12} = \mu \end{aligned} \quad (53)$$

Nadalje, tenzor elastičnosti izotropnog materijala nazivamo izotropnim tenzorom (ostali su primjeri izotropnog tenzora jedinična matrica \mathbf{I} ili Kroneckerova delta δ_{ij}). Svaki se tenzor četvrtog reda može zapisati kao linearna kombinacija tri izotropna tenzora četvrtog reda

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta_2 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (54)$$

te koristeći

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (55)$$

pojedini izrazi u jednadžbi (54) se transformiraju korištenjem svojstva supstitucije indeksa koje posjeduje Kroneckerova delta δ_{ij} , te se zapisuje

$$\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (56)$$

$$\beta_1 \delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{kl} = \beta_1 \delta_{ik} \varepsilon_{jk} = \beta_1 \varepsilon_{ij} \quad (57)$$

$$\beta_2 \delta_{il} \delta_{jk} \varepsilon_{kl} = \beta_2 \delta_{il} \varepsilon_{jl} = \beta_2 \varepsilon_{ij} \quad (58)$$

odnosno

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + (\beta_1 + \beta_2) \varepsilon_{ij} \quad (59)$$

ili uz zamjenu $\beta_1 + \beta_2 = 2\mu$, konstitutivna jednadžba za izotropan materijal glasi

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (60)$$

Važno je zamijetiti da je $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = e$ (suma duljinskih deformacija) što predstavlja prvu invarijantu tenzora deformacija, odnosno ako su komponente tenzora deformacija zapisane u obliku kvadratne matrice, trag matrice ε . Vrijednosti λ i μ su već prije uvedene Laméove konstante, a u inženjerskoj se praksi μ označava sa G

(modul smicanja). Komponente tenzora deformacija izražene preko komponenti tenzora napreznjanja moguće je zapisati izrazom

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (61)$$

Iz ovog se izraza jednostavno može zapisati modul elastičnosti E pomoću Laméovih konstanti. Ako se razmatra jednoosno stanje napreznjanja kod kojeg je $\sigma_{11} \neq 0$, a svi ostali $\sigma_{ij} = 0$, za $i = j = 1$, izraz (61) glasi

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right) = \frac{\sigma_{11}}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) \quad (62)$$

iz čega je nakon jednostavnog sređivanja vidljivo

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (63)$$

Tenzor podatljivosti za ortotropni materijal zapisan pomoću inženjerskih konstanti:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Važno je napomenuti da kako vrijedi $S_{ij} = S_{ji}$ tada je i

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (65)$$

Veza izmedju komponenti tenzora elastičnosti i podatljivosti je slijedeća:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S}; & C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S}; & C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S}; \\ C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S}; & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S}; & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S}; \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}; & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}; & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (66)$$

Ako se radi o jednom sloju, on se razmatra kao ortotropan i u ravninskom stanju napreznjanja, te se umjesto matrice elastičnosti \mathbf{C} koristi reducirana matrica elastičnosti \mathbf{Q}

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ sim. & & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Važno je napomenuti da se elementi \mathbf{Q} ne mogu direktno dobiti iz elemenata \mathbf{C} - članovi matrice \mathbf{Q} imaju nešto manje vrijednosti od odgovarajućih elemenata matrice \mathbf{C} . Elementi \mathbf{Q} se mogu dobiti invertiranjem \mathbf{S} , čiji se elementi ne mijenjaju pri razmatranju jednog sloja u stanju ravninskog naprezanja. Pomoću inženjerskih konstanti, komponente reduciranog tenzora elastičnosti mogu se zapisati

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_6 \end{aligned} \quad (68)$$

te komponente matrice kompatibilnosti

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_6} \end{aligned} \quad (69)$$

Za ugljično vlakno s epoksidnom matricom, karakteristične (generičke) vrijednosti jesu $E_1 = 155$ GPa, $E_2 = E_3 = 12.1$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.248$, $\nu_{23} = 0.458$, $G_{23} = 3.2$ GPa, $G_{13} = G_{12} = 4.4$ GPa.

Korištenjem izraza (68) vrijednosti matrice elastičnosti \mathbf{C} zapisuju se (Tab.3)

Tablica 3: Vrijednosti matrice elastičnosti u [GPa]

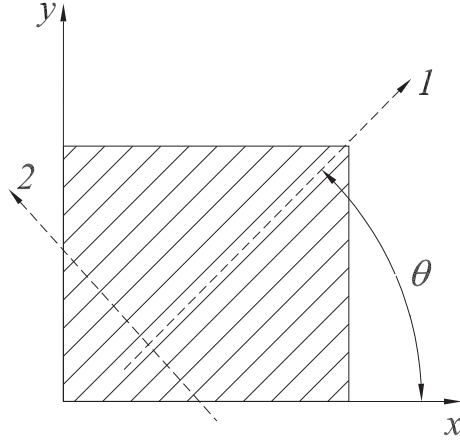
C_{11}	C_{22}	C_{33}	C_{44}	C_{66}	C_{12}	C_{13}	C_{23}	C_{55}
158	15.51	15.51	3.20	4.4	5.64	5.64	7.21	4.40

a vrijednosti reducirane matrice elastičnosti \mathbf{Q} definirane su u Tab. 4

Tablica 4: Vrijednosti reducirane matrice elastičnosti u [GPa]

Q_{11}	Q_{22}	Q_{12}	Q_{66}
155.7	12.16	3.02	4.40

U razmatranjima se koriste dva osnovna koordinatna sustava: sustav glavnih materijalnih osi $(1,2)$ kod kojeg je os 1 u pravcu vlakna dok je os 2 okomita na nju i u ravnini je laminata, te globalni koordinatni sustav (x,y) u kojem će se definirati sile, momenti, naprezanja i deformacije za čitav laminat (Sl. 4). Kut θ zatvaraju osi x i 1 . Ako je \mathbf{Q} definirano u glavnom materijalnom sustavu, postavlja se pitanje kakva je veza između naprezanja i deformacija u globalnom koordinatnom sustavu, definirana matricom $\overline{\mathbf{Q}}$.



Slika 4: Koordinatni sustavi korišteni u transformaciji tenzora elastičnosti

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \text{sim.} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Vežu između komponenti tenzora naprezanja u koordinatnom sustavu $(1,2)$ i sustavu (x,y) daje tenzorska transformacija

$$\bar{\sigma}_{ij} = a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq} \quad (71)$$

gdje je $\bar{\sigma}_{ij}$ tenzor naprezanja u novom koordinatnom sustavu, σ_{pq} tenzor naprezanja u starom koordinatnom sustavu, te a_{ip} kosinus kuta između nove koordinatne osi i i stare osi p . U matricnoj formi ova se transformacija može zapisati kao

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \quad (72)$$

gdje je

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (73)$$

uz $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$. Također vrijedi transformacija

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} \quad (74)$$

gdje je

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (75)$$

Ako su vektor naprezanja i deformacija u globalnom koordinatnom sustavu zapisani kao $\sigma_{|x|}$ i $\varepsilon_{|x|}$, a u glavnom materijalnom kao $\sigma_{|i|}$ odnosno $\varepsilon_{|i|}$ vrijedi

$$\sigma_{|x|} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \sigma_{|i|} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}_\varepsilon \varepsilon_{|i|} \quad (76)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}_\varepsilon \quad (77)$$

Razvijanjem izraza (77), mogu se zapisati pojedini članovi matrice $\bar{\mathbf{Q}}$:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (78)$$

Pomoću inženjerskih konstanti, elementi $\bar{\mathbf{Q}}$ se, uz korištenje supstitucija

$$\tilde{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \tilde{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (79)$$

zapisuju

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \tilde{E}_1 \cos^4 \theta + \tilde{E}_2 \sin^4 \theta + 2(\nu_{21}\tilde{E}_1 + 2G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 - 4G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \nu_{21}\tilde{E}_1 \sin^4 \theta \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= \tilde{E}_1 \sin^4 \theta + 2(\nu_{21}\tilde{E}_1 + 2G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \tilde{E}_2 \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (\tilde{E}_1 - \nu_{21}\tilde{E}_1 - 2G_{12}) \sin \theta \cos^3 \theta + (\nu_{21}\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2 + 2G_{12}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (\tilde{E}_1 - \nu_{21}\tilde{E}_1 - 2G_{12}) \sin^3 \theta \cos \theta + (\nu_{21}\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2 + 2G_{12}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 - 2\nu_{21}\tilde{E}_1 - 2G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + G_{12} \sin^4 \theta \cos^4 \theta \end{aligned} \quad (80)$$

2.2 Promjena elastičnih konstanti kompozitnog materijala s promjenom orijentacije vlakana

Za zadane vrijednosti E_1 , E_2 , G_6 , ν_{12} potrebno je odrediti vrijednosti E_x , E_y , G_{xy} , ν_{xy} pri promjeni kuta orijentacije vlakana θ . Ako u sloju vlada jednoosno stanje naprezanja tako da je $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \sigma_{xy} = 0$, jednostavnom tenzorskom transformacijom izvedena je veza

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \cos^2 \theta \\ \sigma_2 &= \sigma_x \sin^2 \theta \\ \sigma_6 &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (81)$$

Korištenjem Hookeovog zakona za dvoosno stanje

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2}(\sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1) \\ \varepsilon_6 &= \frac{\sigma_6}{G_6} \end{aligned} \quad (82)$$

te nakon uvrštavanja izraza (81) izvodi se

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \sigma_x \left(\frac{\cos^2 \theta}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sin^2 \theta \right) \\ \varepsilon_2 &= \sigma_x \left(\frac{\sin^2 \theta}{E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \cos^2 \theta \right) \\ \varepsilon_6 &= -\sigma_x \frac{\sin \theta \cos \theta}{G_{12}}\end{aligned}\quad (83)$$

Uz primjenu transformacije

$$\varepsilon_{|x|} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \varepsilon_{|i|} \quad (84)$$

slijedi

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \cos^2 \theta \varepsilon_1 + \sin^2 \theta \varepsilon_2 - \sin \theta \cos \theta \varepsilon_6 \\ \varepsilon_y &= \sin^2 \theta \varepsilon_1 + \cos^2 \theta \varepsilon_2 + \sin \theta \cos \theta \varepsilon_6 \\ \varepsilon_s &= 2 \sin \theta \cos \theta (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \varepsilon_6\end{aligned}\quad (85)$$

Nakon uvrštavanja vrijednosti za $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ te ε_6 može se zapisati

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \sigma_x \left[\frac{\cos^4 \theta}{E_1} + \frac{\sin^4 \theta}{E_2} + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \right] \\ \varepsilon_y &= -\sigma_x \left[\frac{\nu_{12}}{E_1} - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right] \\ \varepsilon_s &= -2 \sin \theta \cos \theta \sigma_x \left[\frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{2G_{12}} - \cos^2 \theta \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right]\end{aligned}\quad (86)$$

Kako se radi o jednoosnom stanju naprezanja, vrijedi

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad (87)$$

te prema izrazu (86) slijedi

$$\frac{1}{E_x} = \frac{\cos^4 \theta}{E_1} + \frac{\sin^4 \theta}{E_2} + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \quad (88)$$

Ako se u izraz za E_x umjesto θ uvrsti $(\theta + \frac{\pi}{2})$ izvodi se izraz za E_y

$$\frac{1}{E_y} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \frac{\cos^4 \theta}{E_2} + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \quad (89)$$

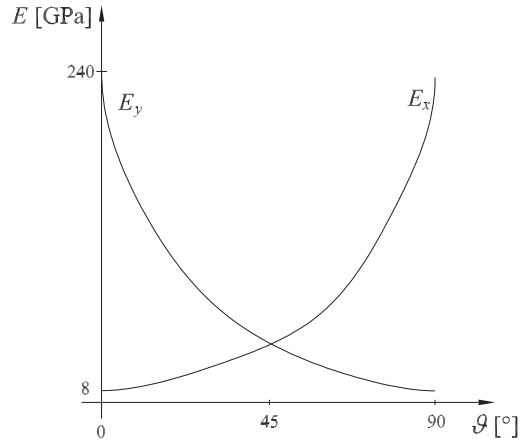
što je za generičke vrijednosti ugljik/epoksi kompozita prikazano na sl. 5

Promjena Poissonovih koeficijenata izražava se pomoću

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (90)$$

odnosno

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{E_x \varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_y}{\sigma_x} \quad (91)$$



Slika 5: Promjena modula elastičnosti u ovisnosti o kutu θ

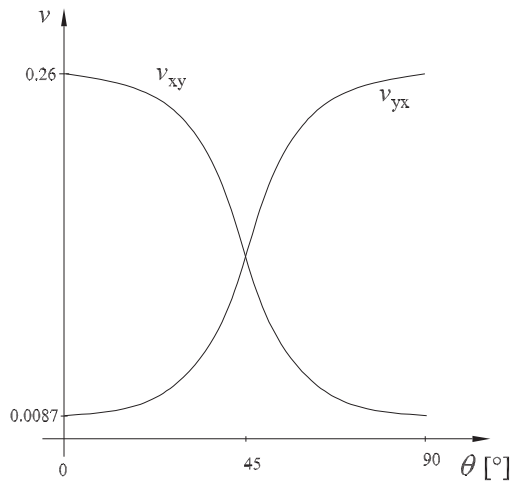
što daje izraz

$$\nu_{xy} = E_x \left[\frac{\nu_{12}}{E_1} - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right] \quad (92)$$

te analogno prethodnom izrazu

$$\nu_{yx} = E_y \left[\frac{\nu_{21}}{E_2} - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right] \quad (93)$$

što je prikazano na sl. 6



Slika 6: Promjena Poissonovih koeficijenata u ovisnosti o kutu θ

Ako se razmatra slučaj $\sigma_{xy} \neq 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$, tada prema izrazima za transformaciju

tenzora naprezanja vrijedi

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xy} \\ \sigma_2 &= -2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xy} \\ \sigma_6 &= -\sigma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\tag{94}$$

te primjenjujući Hookeov zakon vrijedi

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xy} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \\ \varepsilon_2 &= -2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xy} \left(\frac{1}{E_2} + \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) \\ \varepsilon_6 &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\sigma_{xy}}{G_{12}}\end{aligned}\tag{95}$$

a iz ovih se vrijednosti korištenjem tenzorske transformacije prema izrazu (85), γ_{xy} zapisuje kao

$$\gamma_{xy} = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sigma_{xy} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \frac{\sigma_{xy}}{G_{12}}\tag{96}$$

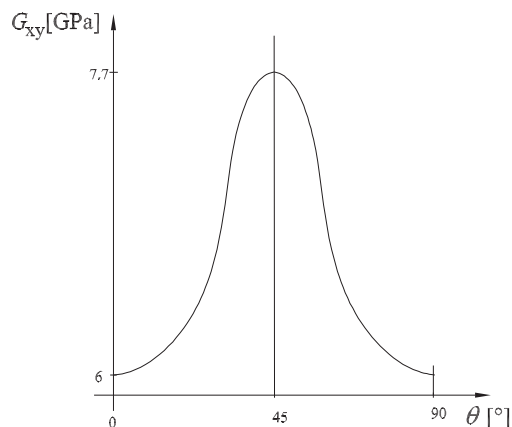
Korištenjem odnosa

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}}\tag{97}$$

slijedi nakon jednostavnih trigonometrijskih transformacija

$$\frac{1}{G_{xy}} = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{1 + \nu_{12}}{E_1} + \frac{1 + \nu_{21}}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) + \frac{1}{G_{12}}\tag{98}$$

Ova je ovisnost prikazana na sl. 7.



Slika 7: Promjena modula smicanja u ovisnosti o kutu θ

3 Mikromehanika

Zadaća mikromehanike je da poznavajući mehanička svojstva vlakna i matrice odredi mehanička svojstva jednog sloja. Analitičke i numeričke metode su najčešće potkrepljene eksperimentima, čime se vrši verifikacija dobivenih numeričkih rezultata. Najčešće korištene metode mikromehanike jesu:

1. pravilo mješavina
2. metoda koncentričnih cilindara
3. model kvadratnog smještaja vlakana
4. *self consistent field methods*
5. Halpin-Tsai jednačbe koje definiraju gornju i donju granicu pojedinih vrijednosti

3.1 Izrazi dobiveni pravilom mješavina

Kao primjer izračuna mehaničkih svojstava sloja, prikazana je najjednostavnija metoda koja u engleskoj terminologiji ima naziv *rule of mixtures*. Osnovne pretpostavke pri postavljanju ovih izraza jesu:

1. veza između vlakna i matrice je idealna
2. nema šupljina u kompozitu
3. ne razmatraju se lokalni efekti, npr. koncentracija naprezanja

Matrica je razmatrana kao izotropna s mehaničkim svojstvima E^m , ν^m , te $G^m = \frac{E^m}{2(1 + \nu^m)}$, dok je vlakno razmatrano kao ortotropno s mehaničkim svojstvima: E_l^f = modul elastičnosti u smjeru pružanja vlakna, E_q^f = modul elastičnosti okomito na smjer pružanja vlakna, $\nu_{lq}^f = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l}$, te G_{lq}^f = modul smicanja. Ako su volumni udjel vlakna i matrice u referentnom volumenu definirani kao v^f i v^m tada prema pretpostavci o nepostojanju šupljina vrijedi

$$v^f + v^m = 1 \quad (99)$$

U daljnjoj analizi razmatraju se dva osnovna slučaja:

1. jednolika deformacija u sloju uz jednoosno stanje naprezanja (*isostrain, action in parallel*)
2. jednoliko naprezanje u sloju (*isostress, action in series*)

Kao primjer primjene ove metode bit će prikazan prvi slučaj.

3.1.1 Slučaj jednolike deformacije u vlaknu i matrici uz jednoosno stanje naprezanja

Osnovne geometrijske veličine prikazane su slikom 8 pri čemu se razmatra jedan kompozitni sloj diferencijalne debljine te širine b na koji djeluje sila F u pravcu vlakna. Ukupna širina matrice označena je sa $\sum b^M$, a ukupna širina svih vlakana kao $\sum b^F$. Prema uvjetu jednolike deformacije u sloju vrijedi

$$\varepsilon_{ll}^f = \varepsilon_{ll}^m = \varepsilon_{ll}^m \quad (100)$$

te

$$\sigma_{ll}^f = E_l^f \varepsilon_{ll}; \quad \sigma_{ll}^m = E^m \varepsilon_{ll}; \quad \sigma_{qq}^f = \sigma_{qq}^m = 0 \quad (101)$$

$$\varepsilon_{qq}^f = -\nu_{lq}^f \varepsilon_{ll}; \quad \varepsilon_{qq}^m = -\nu^m \varepsilon_{ll} \quad (102)$$

Razmatrajući sloj, vidljivo je da je ukupna sila F jednaka

$$F = \sum_m \sigma_{ll}^m b^M + \sum_f \sigma_{ll}^f b^F = \sigma_{ll} b \quad (103)$$

iz čega se može odrediti

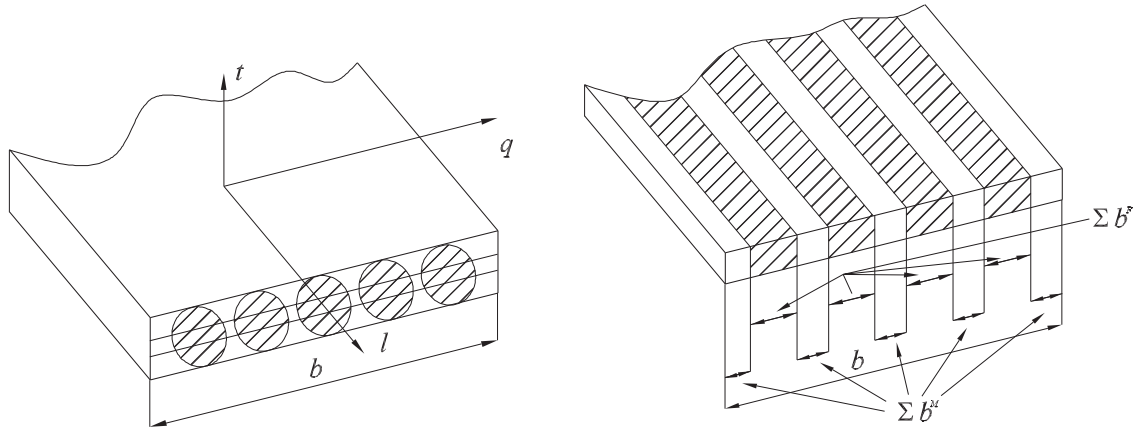
$$\sigma_{ll} = E^m \varepsilon_{ll} \frac{\sum b^M}{b} + E_l^f \varepsilon_{ll} \frac{\sum b^F}{b} \quad (104)$$

Budući da je za sloj diferencijalne debljine kvocijent $\frac{\sum b^F}{b}$ upravo volumni udjel vlakna v^f , prethodni izraz se nakon dijeljenja s ε_{ll} zapisuje

$$\frac{\sigma_{ll}}{\varepsilon_{ll}} = E^m (1 - v^f) + E_l^f v^f = \frac{1}{S_{11}} \quad (105)$$

odnosno

$$S_{11} = \frac{1}{E^m v^m + E_l^f v^f} \quad (106)$$



Slika 8: Geometrijske veličine korištene u izvodu pravila mješavina

Nadalje, iz osnovne konstitutivne jednadžbe slijedi

$$S_{12} = \frac{\varepsilon_{qq}}{\sigma_{ll}} \quad (107)$$

te ako se prepostavi da je deformacija vlakna i matrice konstantna u smjeru q (ali ne i jednaka), ukupno je produljenje sloja u smjeru q jednako

$$\varepsilon_{qq}b = \sum_f \varepsilon_{qq}^f b^M + \sum_m \varepsilon_{qq}^m b^M \quad (108)$$

te se nakon uvrštavanja izraza (104) i (108) u (107) i sređivanja dobija vrijednost S_{12}

$$S_{12} = -\frac{\nu_{lq}^f \nu^f + \nu^m \nu^m}{E_l^f \nu^f + E^m \nu^m} \quad (109)$$

Analizom izraza (106) te (109) vidljivo je otkuda naziv metode pravilo mješavina: pojedine komponente matrice elastičnosti (podatljivosti) se iz odgovarajućih vrijednosti, koje odgovaraju vlaknu i matrici, dobivaju množenjem s njihovim volumnim udjelima.

4 Makromehanika kompozita

Zadaća je makromehanike kompozita da poznavajući mehanička svojstva svih pojedinih slojeva, njihovu debljinu te usmjerenost vlakana u globalnom koordinatnom sustavu, odredi mehanički odziv čitavog kompozita: vrijednosti komponenti tenzora naprezanja i deformacija u slojevima, iz kojih se onda određuju vrijednosti sila i momenata (zbirno za čitav kompozit).

Uvodni izrazi teorije elastičnosti, za dvodimenzionalni slučaj glase:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (110)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (111)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (112)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (113)$$

U indeksnom zapisu koristeći operator deriviranja izrazi glase:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \quad (114)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} \quad (115)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (116)$$

ili koristeći općeniti zapis:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (117)$$

Konstitutivna jednadžba u najopćenitijem slučaju zapisana je:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (118)$$

U sažetom zapisu, ove matrice glase:

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \quad (119)$$

$$C_{ijkl} = C_{mn} \quad (120)$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_n \quad (121)$$

pri čemu vrijedi, koristeći Voightovu konvenciju za sažeti zapis komponenti tenzora naprezanja

$$\sigma_m = C_{mn}\varepsilon_n \quad (122)$$

Tablica 5: Tablica promjene indeksa

ij ili kl	11	22	33	23	31	12
m ili n	1	2	3	4	5	6

4.1 Veza između inženjerskih konstanti i matrice elastičnosti

a) Uz pretpostavku $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = \sigma_{12} = 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2.\end{aligned}\quad (123)$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobiveno je

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{Q_{22}}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}\sigma_1 \\ \varepsilon_2 &= -\frac{Q_{12}}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}\sigma_1.\end{aligned}\quad (124)$$

a budući da vrijedi $E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$ tada je

$$E_1 = \frac{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}{Q_{22}}\quad (125)$$

$$\nu_{12} = \nu_1 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{Q_{12}}{Q_{22}}\quad (126)$$

b) Uz pretpostavku: $\sigma_2 \neq 0; \sigma_1 = \sigma_{12} = 0$ može se izvesti

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}{Q_{11}}\quad (127)$$

$$\nu_{21} = \nu_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{Q_{12}}{Q_{11}}\quad (128)$$

c) Uz pretpostavku: $\sigma_{12} = \sigma_6 \neq 0; \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ vrijedi

$$G_6 = \frac{\sigma_6}{\varepsilon_6} = Q_{66}\quad (129)$$

4.2 Izvod simetrije tenzora elastičnosti i podatljivosti

Konstitutivna jednadžba prema (122) glasi

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j\quad (130)$$

te je diferencijal gustoće energije deformiranja

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i\quad (131)$$

$$dW = C_{ij}\varepsilon_j d\varepsilon_i\quad (132)$$

a gustoća energije deformiranja

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (133)$$

što nakon primjene operatora deriviranja $\frac{\partial}{\partial i}$ glasi

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j \quad (134)$$

te nakon primjene parcijalnog deriviranja po ε_j slijedi

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \quad (135)$$

Ako se konstitutivna jednadžba zapiše u obliku

$$\sigma_j = C_{ji} \varepsilon_i \quad (136)$$

te provede postupak deriviranja dobiva se izraz

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \quad (137)$$

Korištenjem komutativnosti deriviranja i usporedbom izraza (135) i (137) proizlazi simetrija tenzora elastičnosti $C_{ij} = C_{ji}$. Ako se konstitutivna jednadžba zapisuje koristeći tenzor podatljivosti, vrijedi

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (138)$$

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (139)$$

$$dW = \varepsilon_i d\sigma_i = S_{ij} \sigma_j d\sigma_i \quad (140)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_i} = S_{ij} \sigma_j \quad (141)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = S_{ij}. \quad (142)$$

te se korištenjem istog postupka kao kod tenzora elastičnosti, zapisom

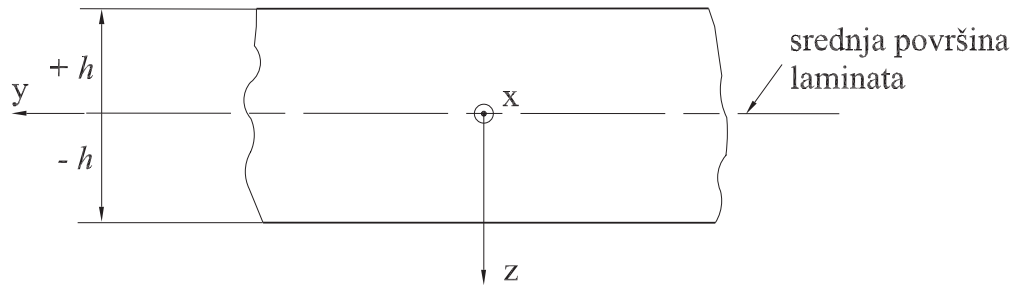
$$\varepsilon_j = S_{ji} \sigma_i \quad (143)$$

uz korištenje komutativnosti množenja pokazuje simetrija tenzora podatljivosti, odnosno $S_{ij} = S_{ji}$.

4.3 Analiza laminata - definiranje sila i momenata

Izrazi izvedeni u ovom poglavlju služe za definiranje naprezanja, deformacija te sila i momenata u višeslojnom kompozitu. Nadalje, analiza ovih veličina dokazat će zašto postoje određeni tipovi rasporeda slojeva (npr. simetrični) koji su dominantni u konstrukcijama. Osnovne pretpostavke korištene pri izvođenju osnovnih izraza teorije laminata su sljedeće:

1. laminat je u stanju ravninskog naprezanja
2. nema klizanja među slojevima
3. normala na laminat ostaje okomita i ravna za vrijeme deformiranja što dovodi do $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
4. pomaci u ravnini laminata su linearna funkcija koordinate z (Kirchhoffova pretpostavka)



Slika 9: Osnovni pojmovi višeslojnog kompozita

Ako su komponente tenzora deformacija definirane kao

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (144)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (145)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (146)$$

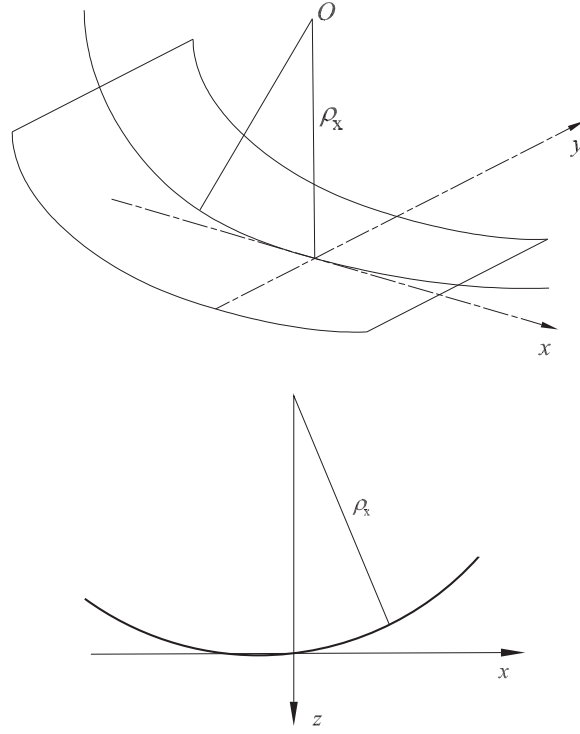
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (147)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (148)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (149)$$

prema Kirchhoffovoj pretpostavci vrijedi

$$u = u_0(x, y) + zF_1(x, y) \quad (150)$$



Slika 10: Definicija radijusa zakrivljenosti ρ_x

$$v = v_0(x, y) + zF_2(x, y) \quad (151)$$

te prema

$$\gamma_{xz} = 0 = \frac{\partial}{\partial z}[u_0(x, y) + zF_1(x, y)] + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (152)$$

$$F_1(x, y) + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (153)$$

$$F_1(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (154)$$

odnosno

$$\gamma_{yz} = 0 = \frac{\partial}{\partial z}[v_0(x, y) + zF_2(x, y)] + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (155)$$

$$F_2(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (156)$$

$$F_2(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (157)$$

Primjenom dobivenih izraza vrijedi

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[u_0 + zF_1(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[u_0 + z(-\frac{\partial w}{\partial x})] \quad (158)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \quad (159)$$

te

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [v_0 + zF_2(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y} [v_0 + z(-\frac{\partial w}{\partial y})] \quad (160)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \quad (161)$$

Analogno

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [u_0 + zF_1] + \frac{\partial}{\partial x} [v_0 + zF_2] = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &= \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{aligned} \quad (162)$$

Ovdje se veličine s indeksom ⁰ odnose na deformaciju srednje površine laminata dok su κ veličine koje definiraju zakrivljenost srednje površine laminata

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (163)$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (164)$$

$$\kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (165)$$

ili u matricnoj formi

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (166)$$

(napomena: veza između komponenti tenzora zakrivljenosti i tenzora radijusa zakrivljenosti jest $\kappa_{ij} = 1/\rho_{ij}$)

4.4 Konstitutivna jednadžba višeslojnih kompozita

Na slikama 11 i 12 prikazani su sile i momenti u komozitu, definirani u globalnom koordinatnom sustavu (x, y, z) . Tada se deformacije i naprezanja zapisuju izrazima

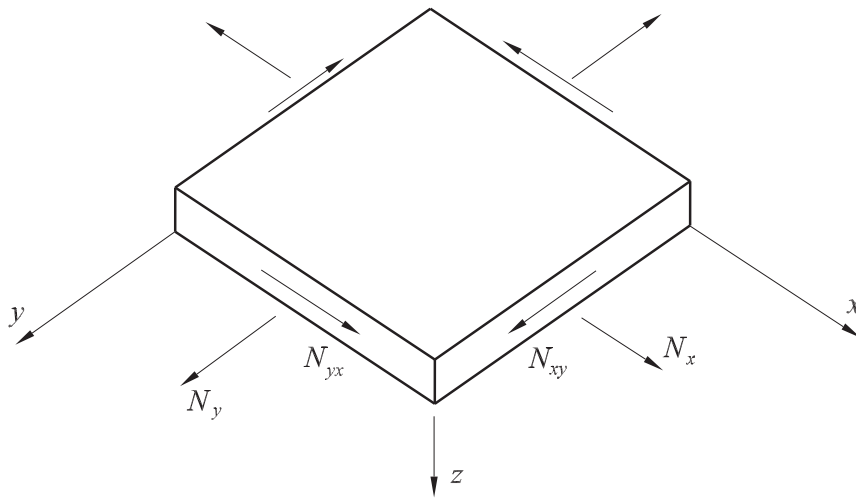
$$\varepsilon_k = \varepsilon^0 + z\kappa \quad (167)$$

$$\sigma_k = \overline{\mathbf{Q}}_k \varepsilon_k = \overline{\mathbf{Q}}_k [\varepsilon^0 + z\kappa] \quad (168)$$

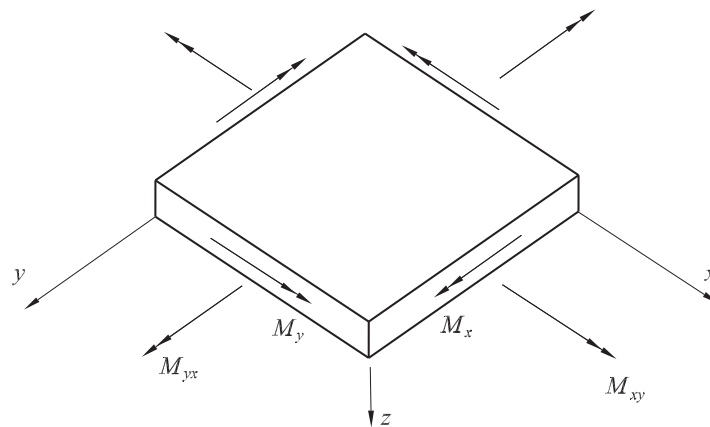
Definicija sila i momenata:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (169)$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad (170)$$



Slika 11: Sile u višeslojnom kompozitu

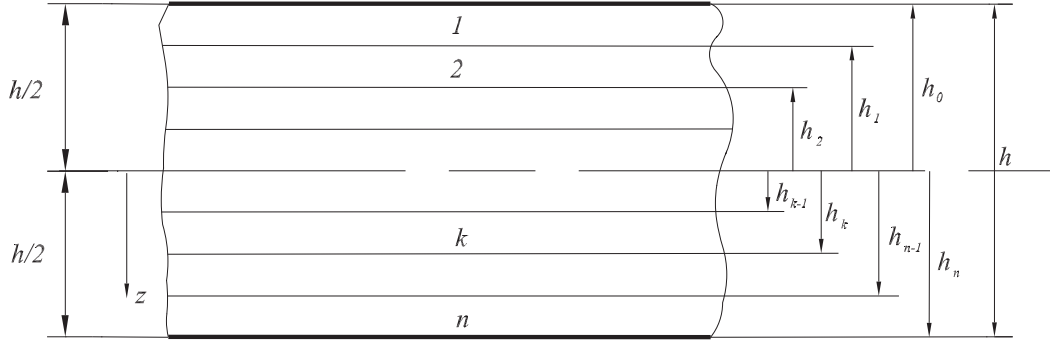


Slika 12: Momenti u višeslojnom kompozitu

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad (171)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (172)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (173)$$



Slika 13: Osnovni pojmovi vezani uz izvod teorije laminata

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz \quad (174)$$

Sile u laminatu moguće je odrediti korištenjem izraza

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \text{sim.} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} dz + \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \text{sim.} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} z dz \quad (175) \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \varepsilon^0 \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \kappa \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \quad (176)$$

a budući su ε^0 i κ definirani za srednju površinu laminata, i stoga neovisni o području integriranja, vrijedi

$$N = \left(\sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k z \Big|_{h_{k-1}}^{h_k} \right) \varepsilon^0 + \left(\sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \frac{z^2}{2} \Big|_{h_{k-1}}^{h_k} \right) \kappa \quad (177)$$

$$N = \mathbf{A} \varepsilon^0 + \mathbf{B} \kappa \quad (178)$$

gdje su matrice \mathbf{A} i \mathbf{B} definirane

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k - h_{k-1}) \quad (179)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (180)$$

Na isti se način definiraju izrazi za momente

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \text{sim.} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} z dz + \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \text{sim.} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} z^2 dz \end{aligned} \quad (181)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \varepsilon^0 \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz + \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \kappa \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \quad (182)$$

$$M = \left(\sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \frac{z^2}{2} \Big|_{h_{k-1}}^{h_k} \right) \varepsilon^0 + \left(\sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \frac{z^3}{3} \Big|_{h_{k-1}}^{h_k} \right) \kappa \quad (183)$$

$$M = \mathbf{B} \varepsilon^0 + \mathbf{D} \kappa \quad (184)$$

pri čemu je matrica \mathbf{D} definirana

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (185)$$

Matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} nazivaju se istezna (*extensional*), spregnuta (*coupling*) te savojna (*bending*) krutost (*stiffness*). Ovi se izrazi mogu zapisati u obliku submatrica:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (186)$$

odnosno prikazano sa svim elementima matrica

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ \text{sim.} & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (187)$$

Korištenjem ovog izraza izraz za silu N_x glasi

$$N_x = A_{11} \varepsilon_x^0 + A_{12} \varepsilon_y^0 + A_{16} \varepsilon_s^0 + B_{11} \kappa_x + B_{12} \kappa_y + B_{16} \kappa_{xy} \quad (188)$$

Ponekad je potrebno deformacije srednje površine prikazati pomoću sila i momenata. Ovu vezu daje izraz

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{16} & \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} & \hat{B}_{16} \\ & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{26} & \hat{B}_{12} & \hat{B}_{22} & \hat{B}_{26} \\ & & \hat{A}_{66} & \hat{B}_{16} & \hat{B}_{26} & \hat{B}_{66} \\ & & & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} & \hat{D}_{16} \\ \text{sim.} & & & & \hat{D}_{22} & \hat{D}_{26} \\ & & & & & \hat{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (189)$$

ili pomoću submatrica

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (190)$$

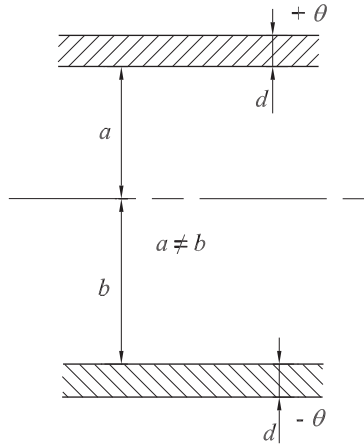
pri čemu vrijedi

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \quad (191)$$

Analiziranjem izraza \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{D} , dolazi se do sljedećih zaključka:

1. pri analizi matrice \mathbf{A} bitni članovi jesu $\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{26}, \bar{Q}_{66}$ dok je razlika $h_k - h_{k-1}$ uvijek pozitivna. Analizom izraza (78) na str. 25 koji definira ju $\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{66}$ uočljivo je da su oni uvijek parne funkcije kuta vlakna θ dok su \bar{Q}_{16} i \bar{Q}_{26} neparne funkcije od θ . Nadalje vrijedi da su \bar{Q}_{16} i \bar{Q}_{26} za $\theta = 0$ ili 90° jednaki nuli. Ovo znači da će za svaka dva sloja jednake debljine d koji se nalaze sa suprotnih strana od srednje površine laminata, a sa suprotnim predznakom vrijednosti kuteva vlakana ($-\theta$ te $+\theta$), članovi matrice \mathbf{A} , A_{16}, A_{26} , biti jednaki nuli (vidjeti sliku 14). Poopćeno, ako se sa suprotnih strana od srednje površine laminata nalaze parovi slojeva jednake debljine, ali sa suprotnim predznacima kuteva vlakana, ukupni $A_{16} = A_{26} = 0$ za čitav laminat. Važno je napomenuti da razmatrani parovi slojeva ne moraju biti jednako udaljeni od srednje površine laminata, već je dovoljno samo da imaju istu debljinu te jednak kut vlakna, ali suprotnog predznaka.

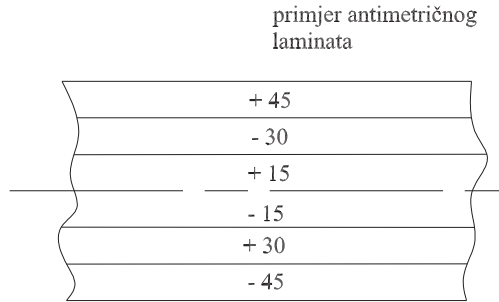
2. Analiza matrice \mathbf{B} . Analiza pokazuje da je



Slika 14: Antimetrični raspored za jedan sloj - analiza \mathbf{A}

$$\begin{aligned} (h_k^2 - h_{k-1}^2) &> 0 & \text{ za } z < 0 \\ (h_k^2 - h_{k-1}^2) &< 0 & \text{ za } z > 0 \end{aligned} \quad (192)$$

te uzevši u obzir razmatranje \bar{Q}_{ij} u analizi matrice \mathbf{A} vidljivo je da će za parove slojeva koji su jednake debljine, jednako udaljeni od srednje površine laminata, ali sa suprotne strane, te istog kuta vlakna $+\theta$, vrijediti da su svi članovi B_{ij} matrice \mathbf{B} jednaki nuli.



Slika 15: Antimetrični raspored slojeva

Ovakav se laminat naziva simetrični i spada u najčešće korištene tipove laminata.

Temeljem ovog razmatranja vidljivo je da ne postoji optimalan način rasporeda slojeva. U slučaju simetričnog laminata ostvareno je $B_{ij} = 0$, ali elementi matrice \mathbf{A} nisu jednaki nuli, osim ako se radi o slojevima pod $\theta = 0$ ili 90° .

3. Analiza matrice \mathbf{D} . Kod ove matrice vrijedi uvijek da je izraz

$$(h_k^3 - h_{k-1}^3) > 0 \quad (193)$$

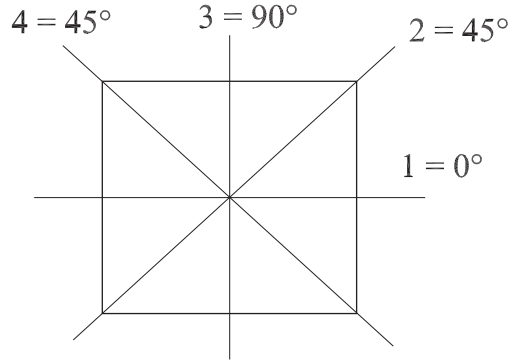
bez obzira s koje strane se srednje površine laminata nalazi razmatrani sloj, te vrijedi isto razmatranje kao i kod razmatranja elemenata matrice \mathbf{A} . Stoga, za dva sloja jednake debljine koji se nalaze sa suprotnih strana od srednje površine, te im je kut vlakna isti ali sa suprotnim predznakom vrijedi da će tada $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = 0$, te će stoga ako se laminat sastoji od takvih parova slojeva i članovi $D_{16} = D_{26} = 0$ za čitav laminat. Važna je razlika u odnosu na raspored slojeva kod razmatranja matrice \mathbf{A} da ovdje parovi slojeva moraju biti jednako udaljeni od srednje površine laminata. Ovakav raspored slojeva naziva se antimetričnim (slika 15).

Važan je i kvaziizotropni raspored slojeva (slika 16), kod kojeg je n slojeva raspoređeno pod međusobnim kutem $\frac{\pi}{n}$ te specijalni ortotropni sloj čime se označava jedan sloj kod kojeg su vlakna pod kutem $\theta = 0$ ili 90° u odnosu na referentni koordinatni sustav.

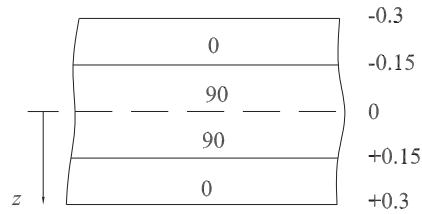
Primjer: Kompozit $[0/90]_s$ izrađen je od ugljik/epoksi materijala kojem su mehanička svojstva zadana kao $E_1 = 155$ GPa, $E_2 = E_3 = 12.1$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.248$, $\nu_{23} = 0.458$, $G_{23} = 3.2$ GPa, $G_{13} = G_{12} = 4.4$ GPa. Potrebno je odrediti naprezanja po slojevima ako je zadana deformacija srednje površine $\varepsilon_x^0 = 0.001$, dok su sve ostale deformacije i zakrivljenosti jednake 0. Svi slojevi su jednake debljine 0.15 mm.

Rješenje: Prema izrazima (168) vrijedi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \text{sim.} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \varepsilon_s^0 + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (194)$$



Slika 16: Kvaziizotropni raspored slojeva



Slika 17: Raspored slojeva

odnosno uzimajući u obzir da je samo $\varepsilon_x^0 \neq 0$, izraz se svodi na

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \text{sim.} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (195)$$

Obzirom da se razmatra kompozit sa slojevima pod 0 i 90°, matricu $\bar{\mathbf{Q}}$, koja je definirana u globalnom koordinatnom sustavu (x, y, z) , direktno je moguće odrediti iz matrice \mathbf{Q} , kako slijedi:

1. za sloj pod 0°, $\bar{\mathbf{Q}}_0$ jednaka je matrici \mathbf{Q} , te vrijedi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ \text{sim.} & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (196)$$

što daje

$$\sigma_x = Q_{11}\varepsilon_x^0 = 155.7\text{MPa} \quad (197)$$

$$\sigma_y = Q_{12}\varepsilon_x^0 = 3.02\text{MPa} \quad (198)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (199)$$

2. za sloj pod 90° , matrica $\bar{\mathbf{Q}}_{90}$ izvodi se iz $\bar{\mathbf{Q}}_0$, pri čemu su samo elementi Q_{11} i Q_{22} zamijenili mjesta, zbog rotacije koordinatnog sustava za 90° , te se izraz za naprezanja zapisuje

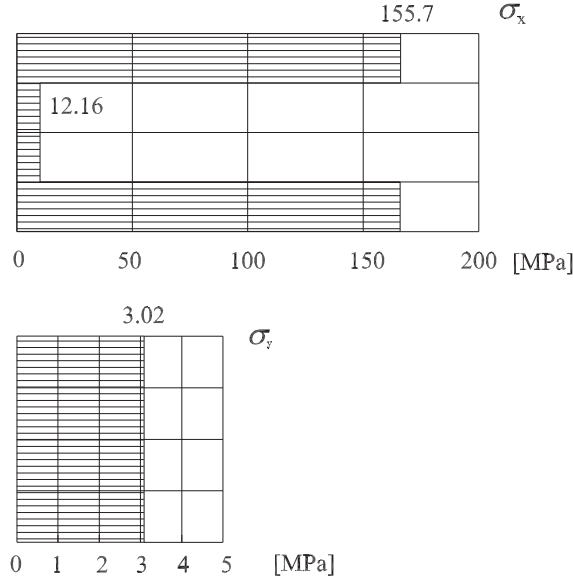
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ sim. & Q_{11} & 0 \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (200)$$

što za slojeve pod 90° daje

$$\sigma_x = Q_{22}\varepsilon_x^0 = 12.16\text{MPa} \quad (201)$$

$$\sigma_y = Q_{12}\varepsilon_x^0 = 3.02\text{MPa} \quad (202)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (203)$$



Slika 18: Raspodjela naprezanja po slojevima

Raspodjela naprezanja po debljini slojeva je konstantna (slika 18). Iz izračunatih vrijednosti vidljivo je da su naprezanja σ_x u sloju pod 0° znatno veća od naprezanja u sloju pod 90° što proizlazi iz jednakosti duljinskih deformacija $\varepsilon_x = \varepsilon_x^0$ te su naprezanja veća u sloju koji ima veći modul elastičnosti u pravcu osi x . S druge strane, jasno je da moraju postojati i vlačna naprezanja σ_y . Naime, zbog Poissonovog koeficijenta trebala bi se pojaviti negativna (poprečna) deformacija u smjeru osi y . Budući su, prema zadanim rubnim uvjetima, spriječene deformacije u smjeru osi y , mora se pojaviti vlačno naprezanje σ_y .

Primjer: Kompozit $[0/90]_s$ izrađen je od ugljik/epoksi materijala kojem su mehanička svojstva zadana kao $E_1 = 155$ GPa, $E_2 = E_3 = 12.1$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.248$,

$\nu_{23} = 0.458$, $G_{23} = 3.2$ GPa, $G_{13} = G_{12} = 4.4$ GPa. Potrebno je odrediti naprezanja po slojevima ako je zadana zakrivljenost srednje površine $\kappa_x = 3.333 \text{ m}^{-1}$ dok su sve duljinske deformacije i preostale zakrivljenosti jednake 0. Svi slojevi su jednake debljine 0.15 mm.

Rješenje: Ponovno je prema izrazu (168) moguće zapisati

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sim. & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \varepsilon_s^0 + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (204)$$

odnosno uzimajući u obzir da je samo $\kappa_x \neq 0$, izraz se svodi na

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sim. & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z\kappa_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (205)$$

Komponente matrice $\bar{\mathbf{Q}}$ za slojeve pod 0 i 90° određene su na isti način kao i u prethodnom primjeru.

1. za sloj pod 0°, $\bar{\mathbf{Q}}_0$ jednaka je matrici \mathbf{Q} , te vrijedi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ sim. & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z\kappa_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (206)$$

što daje

$$\sigma_x = Q_{11}z\kappa_x = 155.7 \cdot 3.33 \cdot z \quad (207)$$

$$\sigma_y = Q_{12}z\kappa_x = 3.02 \cdot 3.33 \cdot z \quad (208)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (209)$$

Ovo za svaki sloj daje po dvije vrijednosti za svako naprezanje u ovisnosti o vrijednosti koordinate z .

2. za sloj pod 90°, matrica $\bar{\mathbf{Q}}_{90}$ izvodi se iz $\bar{\mathbf{Q}}_0$, pri čemu su samo elementi Q_{11} i Q_{22} zamijenili mjesta, zbog rotacije koordinatnog sustava za 90°, te se izraz za naprezanja zapisuje

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{11} & 0 \\ sim. & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z\kappa_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (210)$$

što za slojeve pod 90° daje

$$\sigma_x = Q_{22}z\kappa_x = 12.16 \cdot 3.33 \cdot z \quad (211)$$

$$\sigma_y = Q_{12}z\kappa_x = 3.02 \cdot 3.33 \cdot z \quad (212)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (213)$$

Tablica 6: Vrijednosti naprezanja

$\theta [^\circ]$	0		90		90		0	
z [mm]	$z_{min} = -0.3$	$z_{max} = -0.15$	$z_{min} = -0.15$	$z_{max} = 0$	$z_{min} = 0$	$z_{max} = 0.15$	$z_{min} = 0.15$	z_{max}
σ_x [GPa]	-155.54	-77.77	-6.07	0	0	6.07	77.77	155
σ_y [GPa]	-3.02	-1.51	-1.51	0	0	1.51	1.51	3.0

Raspodjela naprezanja po debljini slojeva je linearna (slika 19). Vrijednosti pojedinih naprezanja definirani su tablicom .

Negativna vrijednost naprezanja σ_x za $z < 0$ fizikalno se može objasniti kao i u teoriji savijanja greda. Za razliku od prethodnog primjera, naprezanja σ_y imaju različit predznak u ovisnosti o predznaku koordinate z . Vrijedi ista analiza djelovanja Poissonovog efekta kao i u prethodnom zadatku, no budući da σ_x nema isti predznak, mijenja se i predznak σ_y . Linearna promjena σ_y po debljini rezultat je linearne promjene duljinske deformacije ε_x .

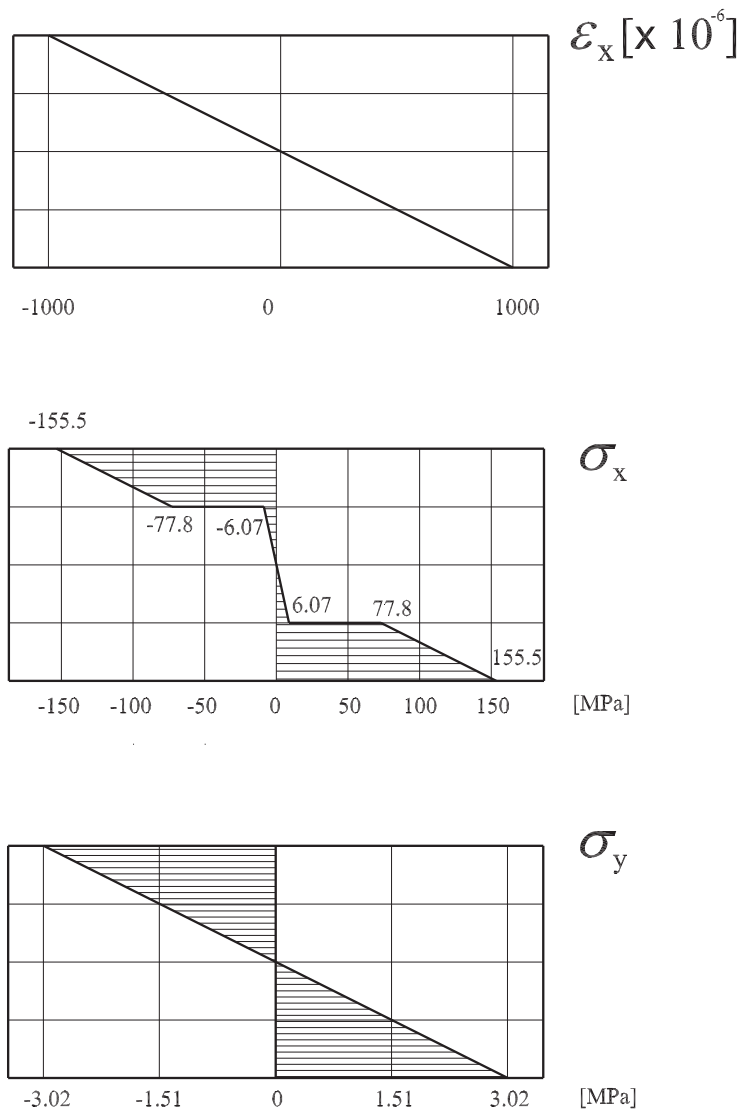
4.5 Kriteriji popuštanja kompozita

Za razliku od izotropnih materijala (tehničkih metala) kod kompozita su mehanizmi popuštanja materijala bitno drugačiji, i ne mogu se opisati klasičnim pristupom kao krhi ili duktilni lom. Samim tim što se radi o spajanju često velikog broja slojeva (i do nekoliko stotina), a niti sam sloj nije homogen već se sastoji od barem dva konstituenta, jasno je da se popuštanje može dogoditi na vrlo različite načine. Najčešće se razmatraju:

- lom matrice
- pucanje vlakna
- izvlačenje vlakna
- delaminacije, pri čemu dolazi do odvajanja slojeva - kod zrakoplovnih konstrukcija vrlo su opasna jedva vidljive udarna oštećenja (*Barely Visible Impact Damage*), koji se mogu sastojati od delaminacija i od loma matrice koji prethodi delaminacijama

Danas je razvijen vrlo velik broj kriterija popuštanja (nekoliko stotina) od kojih su neki specifični, dok su ostali općenitiji i više prihvaćeni u inženjerskoj praksi. Najpoznatiji i najšire prihvaćeni kriteriji popuštanja jesu:

- kriterij maksimalnih naprezanja
- kriterij maksimalnih deformacija
- Tsai-Hill kriterij
- Tsai-Wu kriterij
- Puck-ov kriterij
- Hashin-ov kriterij itd.



Slika 19: Raspodjela naprezanja po slojevima

Kriteriji se uvijek postavljaju za jedan sloj, naprezanja su definirana u glavnom materijalnom sustavu, te je nužno poznavati 5 parametara čvrstoće:

- X_t = vlačna čvrstoća u pravcu vlakna
- X_c = tlačna čvrstoća u pravcu vlakna
- Y_t = vlačna čvrstoća okomito na pravac vlakna
- Y_c = tlačna čvrstoća okomito na pravac vlakna
- S = smična čvrstoća

ili pet parametara deformacija, ako se postavlja kriterij pomoću dopuštenih deformacija

- $X_{\epsilon t}$ = dopuštena vlačna deformacija u pravcu vlakna
- $X_{\epsilon c}$ = dopuštena tlačna deformacija u pravcu vlakna
- $Y_{\epsilon t}$ = dopuštena vlačna deformacija okomito na pravac vlakna
- $Y_{\epsilon c}$ = dopuštena tlačna deformacija okomito na pravac vlakna
- S_{ϵ} = dopuštena kutna deformacija

Generičke vrijednosti čvrstoće kompozitnih materijala prikazane su u Tablici 7.

Tablica 7: Uobičajene vrijednosti čvrstoće kompozita

	T300/epoksi	kevlar/epoksi
X_t [GPa]	1.5	1.4
X_c [GPa]	-1.5	-0.235
Y_t [MPa]	40	12
Y_c [MPa]	-246	-53
S [MPa]	48	34

Bitna razlika u odnosu na kriterije definirane kod izotropnih (metalnih) materijala jest da vrijednosti naprezanja koje ulaze u kriterije nisu glavne (svojstvene) vrijednosti tenzora naprezanja već vrijednosti naprezanja u sustavu glavnih materijalnih osi jednog sloja.

4.5.1 Kriterij maksimalnog naprezanja

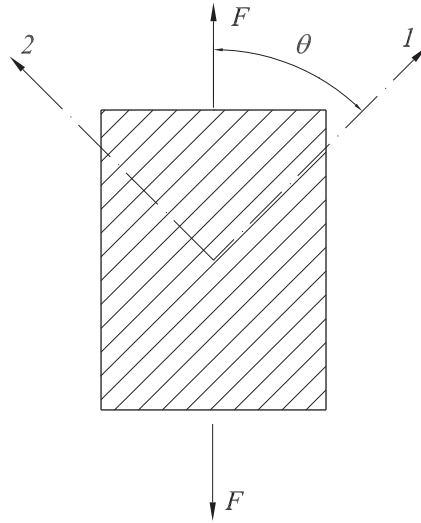
Kriterij se najviše primjenjuje kod jednoosnog opterećenja i kaže da do popuštanja neće doći ako je ispunjeno:

$$\text{za } \sigma > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 < X_t \\ \sigma_2 < Y_t \\ |\tau_{12}| < S \end{array} \right\} \quad (214)$$

$$\text{za } \sigma < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 > X_c \\ \sigma_2 > Y_c \\ |\tau_{12}| < S \end{array} \right\} \quad (215)$$

Nedostatak ovog kriterija je da ne daje dovoljno pouzdane rezultate kad se radi o dvoosnom slučaju opterećenja. Ako opterećenje nije u pravcu jedne od glavnih materijalnih osi, već pod kutem θ u odnosu na os 1 (slika 20), moguće je zapisati

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \cos^2 \theta < X \\ \sigma_2 &= \sigma_x \sin^2 \theta < Y \\ \tau_{12} &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta < S \end{aligned} \quad (216)$$



Slika 20: Opterećenje koje ne djeluje u pravcu glavnih materijalnih osi

iz čega slijedi uvjet da σ_x smije imati maksimalnu vrijednost koja je jednaka

$$\begin{aligned} \sigma_x &< \frac{X}{\cos^2 \theta} \\ \sigma_x &< \frac{Y}{\sin^2 \theta} \\ \sigma_x &< \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned} \quad (217)$$

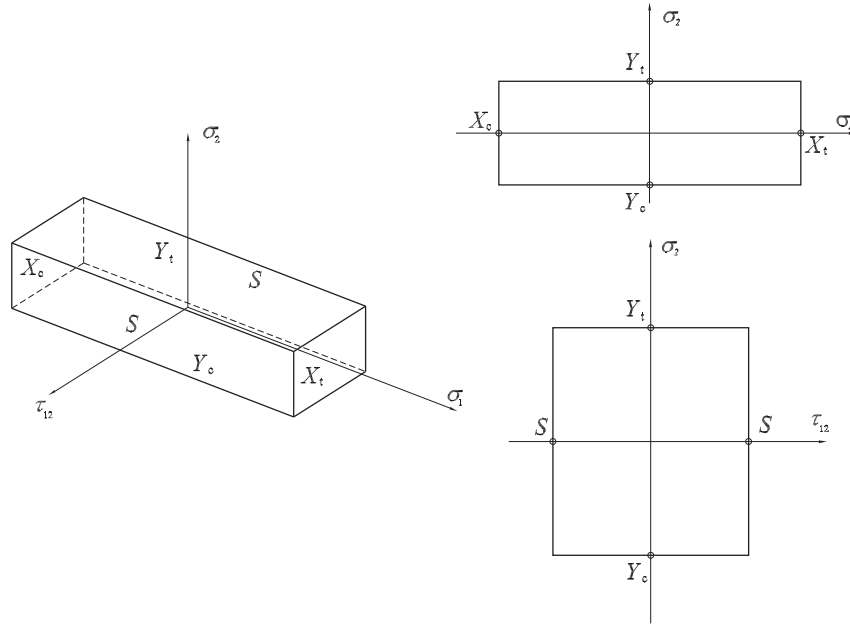
U ovim izrazima X, Y, S se koriste kao tlačno ili vlačna čvrstoća, u ovisnosti o predznaku σ_x , a kojeg zapisujemo pomoću apsolutne vrijednosti. U tom se slučaju i vrijednost naprezanja σ_x zapisuje svojom apsolutnom vrijednošću. Usporedba s eksperimentalnim podacima pokazala je da će kriterij davati najbolje vrijednosti za $\theta = 0$ ili 90° , dok će podudaranje s eksperimentima biti najslabije pri $\theta = 45^\circ$. Površina popuštanja može se prikazati slikom 21.

4.5.2 Kriterij maksimalnih deformacija

Postoji velika sličnost s kriterijem maksimalnih normalnih naprezanja. Sva ograničenja u primjeni koja su navedena kod tog kriterija vrijede i kod kriterija maksimalnih deformacija. Do popuštanja neće doći ako je ispunjeno:

$$\text{za } \varepsilon > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 < X_{\varepsilon t} \\ \varepsilon_2 < Y_{\varepsilon t} \\ |\varepsilon_6| < S_\varepsilon \end{array} \right\} \quad (218)$$

$$\text{za } \varepsilon < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 > X_{\varepsilon c} \\ \varepsilon_2 > Y_{\varepsilon c} \\ |\varepsilon_6| < S_\varepsilon \end{array} \right\} \quad (219)$$



Slika 21: Površina popuštanja kod kriterija maksimalnih naprezanja

Pomoću

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2) \quad (220)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2}(\sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

te koristeći transformaciju za σ_x kako je prije definirano, može se zapisati

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1}(\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta)\sigma_x \quad (221)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2}(\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta)\sigma_x$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{1}{G_{12}} \sin \theta \cos \theta \sigma_x$$

te znajući da u linearno elastičnom području vrijedi

$$X_\varepsilon = \frac{X}{E_1} \quad (222)$$

$$Y_\varepsilon = \frac{Y}{E_2}$$

$$S_\varepsilon = \frac{S}{G_{12}}$$

dobivaju se iz izraza (221) maksimalne vrijednosti dozvoljenog naprezanja σ_x

$$\varepsilon_1 < X_{\varepsilon t} \quad (223)$$

$$\frac{1}{E_1}(\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta)\sigma_x < X_{\varepsilon t} \quad (224)$$

$$(\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta)\sigma_x < X_{\varepsilon t} E_1 \quad (225)$$

što uzevši u obzir izraz (222), te zapisano i za preostala dva uvjeta, daje

$$\begin{aligned} \sigma_x &< \frac{X}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} \\ \sigma_x &< \frac{Y}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta} \\ \sigma_x &< \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned} \quad (226)$$

Usporedba s eksperimentalnim vrijednostima dovodi do sličnih zaključaka kao i kod kriterija maksimalnih naprezanja - najbolje je podudaranje kod $\theta = 0$ ili 90° , dok će podudaranje s eksperimentima biti najslabije pri $\theta = 45^\circ$. Površina popuštanja ima isti oblik kao i kod kriterija maksimalnih normalnih naprezanja, samo što se umjesto vrijednosti čvrstoće, upisuju vrijednosti deformacija. Dopuštene deformacije nekih kompozita prikazane su Tablicom 8.

Tablica 8: Uobičajene vrijednosti dopuštenih deformacija kompozita

	T300/epoksi	kevlar/epoksi
$X_{\varepsilon t} [10^{-3}]$	8.29	18.42
$X_{\varepsilon c} [10^{-3}]$	-8.29	-3.09
$Y_{\varepsilon t} [10^{-3}]$	3.88	2.18
$Y_{\varepsilon c} [10^{-3}]$	-23.88	-9.64
$S_{\varepsilon} [10^{-3}]$	9.48	14.28

4.5.3 Tsai-Hill Kriterij

Ovaj kriterij koristi se u slučaju troosnog stanja naprezanja i spada u skupinu energetske kriterija popuštanja. Kriterij kaže da do popuštanja kompozitnog sloja neće doći ako je ispunjen uvjet:

$$\begin{aligned} (G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - \\ - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 < 1 \end{aligned} \quad (227)$$

gdje su parametri $F \dots N$ definirani iz čvrstoće materijala. Njihove vrijednosti dobivene su tako da se razmatraju slučajevi jednoosnog stanja naprezanja. Tako se iz uvjeta $\sigma_1 \neq 0$, uz sve ostale komponente tenzora naprezanja $\sigma_{ij} = 0$, dobiva

$$G + H = \frac{1}{X^2} \quad (228)$$

Ako se postupak ponovi i za ostale komponente tenzora naprezanja, izvode se relacije

$$\begin{aligned} 2N &= \frac{1}{S^2} \\ F + H &= \frac{1}{Y^2} \\ F + G &= \frac{1}{Z^2} \end{aligned} \quad (229)$$

iz kojih se dodatnim sređivanjem izvode izrazi

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \\ 2G &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \\ 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \end{aligned} \quad (230)$$

X, Y, Z predstavljaju parametre čvrstoće. Kod ovih parametara nisu naznačeni indeksi $()_c$ odnosno $()_t$ budući da se oni dodjeljuju ovisno o predznaku odgovarajućeg naprezanja. Parametar Z nije prije definiran, i predstavlja čvrstoću u smjeru okomito na ravninu sloja (u pravcu 3 koji se definira vektorskim produktom vektora smjera glavnih materijalnih osi 1 i 2). Za jedan sloj, koji je u ravninskom stanju naprezanja, Tsai-Hill kriterij glasi

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} < 1 \quad (231)$$

te prema analogiji sa prijašnja dva kriterija popuštanja, ako djeluje samo naprezanje σ_x pod kutem θ u odnosu na os 1, kriterij se zapisuje

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} < \frac{1}{\sigma_x^2} \quad (232)$$

4.5.4 Tsai-Wu Kriterij

Ovaj kriterij naziva se još i tenzorski ili kvadratični kriterij popuštanja i spada među najčešće korištene kriterije. Tenzorski (indeksni) zapis kriterija jest

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 6 \quad (233)$$

u kojem se slučaju zapis kriterija sastoji od 42 člana

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + \dots + F_6 \sigma_6 + \dots + F_{11} \sigma_1 \sigma_1 + F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \dots + F_{66} \sigma_6 \sigma_6 = 1 \quad (234)$$

U ovom su izrazu F_i te F_{ij} , parametri u koje ulazi čvrstoća kompozita. Ako se razmatra samo jedan sloj u ravninskom stanju naprezanja, ostaju samo indeksi 1,2,6 (prema sažetom zapisu kako je definirano tablicom 5 na str.33) te se kriterij zapisuje

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 = 1 \quad (235)$$

Detaljnou analizom može se pokazati da je $F_{16} = F_{26} = 0$. Vrijednosti parametara dobivaju se na sličan način kao i kod Tsai-Hill kriterija.

Ako se razmatra slučaj $\sigma_1 \neq 0$, uz sve ostale komponente tenzora naprezanja $\sigma_{ij} = 0$, jasno je da najveća moguća vrijednost koju ova komponenta naprezanja može poprimiti, a da nije narušen kriterij čvrstoće, mora biti X_t ili X_c (ovisno o tome da li je naprezanje tlačno ili vlačno). Tsai-Wu kriterij tada daje dva izraza (jedan za pozitivan, a drugi za negativan predznak σ_1)

$$\begin{aligned} F_1 X_t + F_{11} X_t^2 &= 1 \\ F_1 X_c + F_{11} X_c^2 &= 1 \end{aligned} \quad (236)$$

Rješenje ovog sustava predstavljaju vrijednosti F_1 te F_{11}

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} \\ F_{11} &= -\frac{1}{X_t X_c} \end{aligned} \quad (237)$$

Ponavljanjem istog postupka uz $\sigma_2 \neq 0$ određuju su parametri

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \\ F_{22} &= -\frac{1}{Y_t Y_c} \end{aligned} \quad (238)$$

te uz $\sigma_6 \neq 0$ slijedi

$$F_{66} = \frac{1}{S^2} \quad (239)$$

Parametar F_6 mora biti jednak 0 jer bi u suprotnom vrijednost lijeve strane izraza (235) ovisila o predznaku posmičnog naprezanja σ_6 , što fizikalno nije moguće (predznak posmičnog naprezanja ne smije utjecati na rješenje). Parametar F_{12} ne može se odrediti uniaksijalnim testovima, već bi se morao provoditi biaksijalni test kod kojeg je npr. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, dok je $\sigma_6 = 0$. Uvrštavanjem u kriterij popuštanja izvodi se izraz

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1 \quad (240)$$

što nakon sređivanja daje

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right] \quad (241)$$

Drugi zapis parametra F_{12} koji se često koristi glasi

$$F_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{F_{11} F_{22}} \quad (242)$$

u kojem se slučaju Tsai-Wu kriterij zapisuje u obliku koji se i najčešće koristi

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 - \sqrt{F_{11} F_{22}} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (243)$$

Karakteristike Tsai-Wu kriterija:

1. kriterij ne indicira način na koji će sloj popustiti već samo naprezanje kod kojeg će sloj popustiti
2. kriterij je postavljen samo jednim izrazom što dovodi do znatno jednostavnije primjene
3. ako treba odrediti najveće dopušteno naprezanje, kriterij uvijek daje dva rješenja - jedno s pozitivnim, a drugo s negativnim predznakom

Ovo je moguće pokazati jednostavnim primjerom. Za sloj kod kojeg je poznato da je $\sigma_1 = \sigma$, a $\sigma_2 = \sigma_6 = 0$, potrebno je odrediti maksimalnu vrijednost σ_1 . Prema Tsai-Wu kriteriju vrijedi

$$F_1\sigma + F_{11}\sigma^2 = 1 \quad (244)$$

rješavanjem kvadratne jednadžbe određuje se σ

$$\sigma = \frac{-F_1 \pm \sqrt{F_1^2 + 4F_{11}}}{2F_{11}} \quad (245)$$

što nakon uvrštavanja vrijednosti za F_1 i F_{11} pomoću čvrstoća sloja, izrazi (237), daje dva rješenja:

$$\sigma_I = X_t \quad \text{odnosno} \quad \sigma_{II} = X_c \quad (246)$$

Površina popuštanja u koordinatnom sustavu $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ ima oblik elipsoida prema sl. 22, dok za $\tau_{12}=0$ poprima oblik elipse prema sl. 23. Na ovoj slici označeno šrafirano područje predstavlja ono kod kojeg zbog interakcije naprezanja σ_1 i σ_2 neće doći do popuštanja kompozita čak i kada vrijednosti pojedinih naprezanja prelaze vrijednosti čvrstoće (napomena: usporediti kod HMH kriterija za izotropne materijale slučaj troosnog stanja naprezanja kada sve tri komponente normalnog naprezanja imaju istu vrijednost, a posmična su naprezanja jednaka nuli - bez obzira na njihovu veličinu, neće doći do loma)

Primjer: Prema kriteriju maksimalnog naprezanja i Tsai-Wu kriteriju potrebno je odrediti maksimalnu aksijalnu silu P kojom se smije opteretiti cijev prema slici. Materijal cijevi je ugljik/epoksi s rasporedom slojeva $[\pm 20/0_3]_s$. Polumjer srednje površine cilindra $R = 25$ mm, a debljina jednog sloja $h = 0,15$ mm, slika 24.

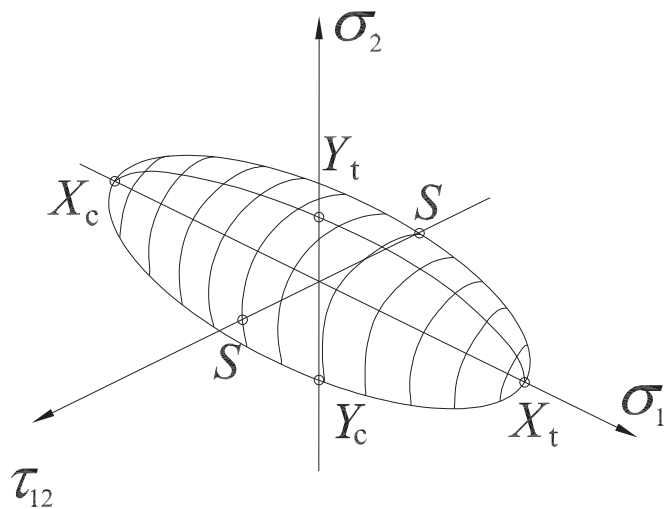
Rješenje: Čvrstoća sloja u glavnom materijalnom sustavu definirana je tablicom 9.

Tablica 9: Čvrstoća sloja

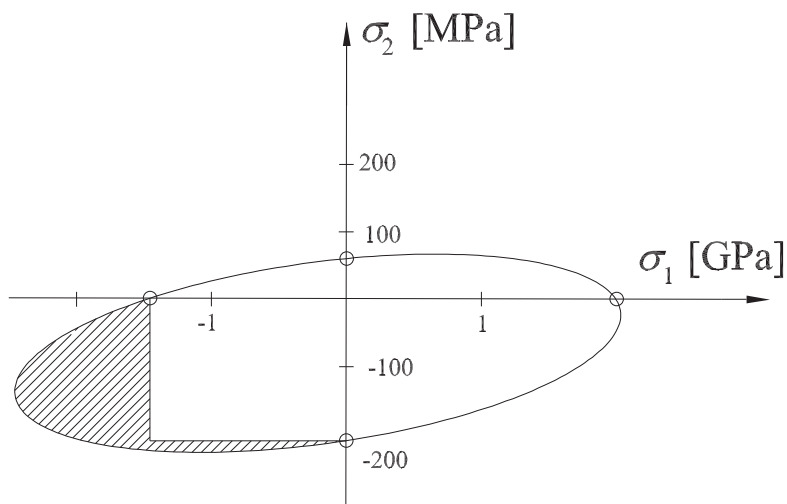
X_t [GPa]	X_c [GPa]	Y_t [MPa]	Y_c [MPa]	S [MPa]
1.5	-1.25	40	-246	48

Prema teoriji membranskih naprezanja ljsaka jedino naprezanje koje se u cijevi javlja jest meridijansko, te je meridijanska sila N_x dobivena iz sume sila u pravcu osi ljsuke

$$N_x = \frac{P}{2R\pi} \quad (247)$$



Slika 22: Površina popuštanja prema kriteriju Tsai-Wu



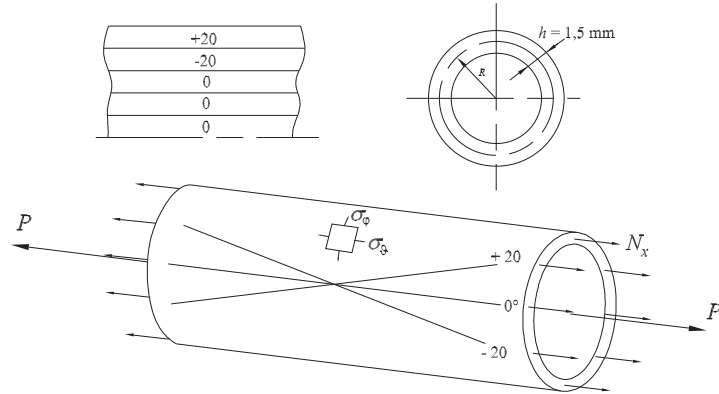
Slika 23: Krivulja popuštanja prema kriteriju Tsai-Wu uz $\tau_{12} = 0$

Iz izraza

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (248)$$

koristeći uvjete da su $M = 0$ (poznavaajući opterećenje), te $\mathbf{B} = 0$ (zbog simetričnog rasporeda slojeva), izraz se zapisuje

$$\begin{Bmatrix} N \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (249)$$



Slika 24: Shematski prikaz opterećenja i rasporeda slojeva

iz čega slijedi da je i vektor zakrivljenosti $\kappa = 0$. Konačno se zapisuje

$$N = \mathbf{A}\varepsilon^0 \quad (250)$$

odnosno

$$\varepsilon^0 = \mathbf{A}^{-1}N \quad (251)$$

te

$$\sigma = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^{-1}N \quad (252)$$

U početnom razmatranju uz $P = 1$ N, dobiva se $N_x = 6.37$ N/m, a vrijednosti naprezanja po slojevima, koristeći izraze definirane u teoriji lamina, su izračunate i prikazane u Tablicom 10.

Tablica 10: Naprezanja po slojevima u [Pa]

	σ_1	σ_2	σ_6
+20°	3830	-112.3	-148.7
-20°	3830	-112.3	+148.7
0°	4770	-168.6	0

Budući su ove vrijednosti dobivene uz jediničnu silu P , postavlja se pitanje kojim maksimalnim faktorom p se smije pomnožiti tu jediničnu silu da bi još uvijek bio zadovoljen uvjet čvrstoće.

Primjena kriterija σ_{max}

1. sloj +20°

$$\sigma_1 = 3830p, \sigma_2 = -112.3p, \sigma_6 = -148.7p \quad (253)$$

Korištenjem prvog kriterija

$$X_c < \sigma_1 < X_t \quad (254)$$

odnosno

$$-1250 \cdot 10^6 < 3830p < 1500 \cdot 10^6 \quad (255)$$

Ovaj uvjet može se zapisati

$$-1250 \cdot 10^6 < 3830p \quad \text{iz čega slijedi} \quad p > -3.26 \cdot 10^5 \quad (256)$$

te

$$3830p < 1500 \cdot 10^6 \quad \longrightarrow \quad p < +3.92 \cdot 10^5 \quad (257)$$

Prema kriteriju

$$Y_c < \sigma_2 < Y_t \quad (258)$$

vrijedi

$$-200 \cdot 10^6 < -112.3p < 50 \cdot 10^6 \quad (259)$$

odnosno

$$-200 \cdot 10^6 < -112.3p \quad \longrightarrow \quad p < 1.78 \cdot 10^6 \quad (260)$$

$$-112.3p < 50 \cdot 10^6 \quad \longrightarrow \quad p > -4.45 \cdot 10^6 \quad (261)$$

Primjenom treće grupe izraza

$$|\sigma_6| < S \quad (262)$$

$$|\sigma_6| < 100 \cdot 10^6 \quad (263)$$

odnosno

$$|\sigma_6| < S \quad (264)$$

što daje

$$148.7p < 100 \cdot 10^6 \quad \longrightarrow \quad p < 6.72 \cdot 10^5 \quad (265)$$

$$-148.7p < 100 \cdot 10^6 \quad \longrightarrow \quad p > -6.72 \cdot 10^5 \quad (266)$$

Područje vrijednosti u kojem neće doći do popuštanja sloja $+20^\circ$ bit će presjek svih ovako definiranih područja

$$-3.26 \cdot 10^5 < p < 3.92 \cdot 10^5 \quad (267)$$

2. sloj -20°

Zbog istih vrijednosti naprezanja (osim σ_6 čiji predznak nema važnosti obzirom da se radi s apsolutnim vrijednostima) područje bez popuštanja je isto kao i kod sloja $+20^\circ$.

3. sloj 0°

Korištenjem iste metodologije kao i kod slojeva $\pm 20^\circ$

$$\sigma_1 = 4770p, \quad \sigma_2 = -168.6p, \quad \sigma_6 = 0 \quad (268)$$

vrijedi za

$$X_c < \sigma_1 < X_t \quad (269)$$

$$-1250 \cdot 10^6 < 4770p < 1500 \cdot 10^6 \quad (270)$$

$$-1250 \cdot 10^6 < 4770p \quad \longrightarrow \quad p > -2.62 \cdot 10^5 \quad (271)$$

$$4770p < 1500 \cdot 10^6 \quad \longrightarrow \quad p < +3.14 \cdot 10^5 \quad (272)$$

odnosno

$$Y_c < \sigma_2 < Y_t \quad (273)$$

$$-200 \cdot 10^6 < -168.6p < 50 \cdot 10^6 \quad (274)$$

$$-200 \cdot 10^6 < -168.6p \quad \longrightarrow \quad p < 1.186 \cdot 10^6 \quad (275)$$

$$-168.6p \cdot 10^6 < 50 \cdot 10^6 \quad \longrightarrow \quad p > -2.97 \cdot 10^6 \quad (276)$$

te prema

$$|\sigma_6| < S \quad (277)$$

$$\sigma_6 < S \quad \longrightarrow \quad p < \infty \quad (278)$$

$$-\sigma_6 < S \quad \longrightarrow \quad p > -\infty \quad (279)$$

čime je područje sigurnosti određeno

$$-2.62 \cdot 10^5 < p < 3.14 \cdot 10^5 \quad (280)$$

Ako se razmatra čitav kompozit, vidljivo je da je sloj 0° onaj koji definira čvrstoću jer je presjek svih područja sigurnosti svih slojeva upravo u području

$$-2.62 \cdot 10^5 < p < 3.14 \cdot 10^5 \quad (281)$$

Primjena kriterija Tsai-Wu

Zapis kriterija

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 - \sqrt{F_{11}F_{22}}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (282)$$

pri čemu su parametri čvrstoće definirani prema izrazima (237), (238), (239) te (242) i prikazani tablicom 11.

Tablica 11: Parametri čvrstoće

F_1 [1/GPa]	F_2 [1/GPa]	F_{11} [1/GPa ²]	$F_{22} = F_{66}$ [1/GPa ²]
0.1333	15	0.533	100

1. Za sloj $+20^\circ$ kriterij ima oblik

$$F_1 3830p + F_2(-112.3p) + F_{11}(3830p)^2 + F_{22}(-112.3p)^2 + F_{66}(-148.7p)^2 - \sqrt{F_{11}F_{22}} 3830p(-112.3p) = 1 \quad (283)$$

koji nakon uvrštavanja vrijednosti parametara čvrstoće ima oblik

$$Ap^2 + Bp + C = 0 \quad (284)$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivene su dvije vrijednosti

$$p_I = -1.98 \cdot 10^5 \quad , \quad p_{II} = 3.5 \cdot 10^5 \quad (285)$$

te se uvjet čvrstoće zapisuje

$$-1.98 \cdot 10^5 < p < 3.5 \cdot 10^5 \quad (286)$$

2. Za sloj -20° izraz za kriterij je isti kao i za $+20^\circ$, te p ponovno mora biti u granicama

$$-1.98 \cdot 10^5 < p < 3.5 \cdot 10^5 \quad (287)$$

3. Za sloj 0° kriterij se zapisuje

$$F_1 4770p + F_2(-168.6p) + F_{11}(4770p)^2 + F_{22}(-168.6p)^2 + -\sqrt{F_{11}F_{22}}4770p(-168.6p) = 1 \quad (288)$$

te se nakon uvrštavanja parametara čvrstoće i rješavanje kvadratne jednadžbe dobiva uvjet

$$-1.56 \cdot 10^5 < p < 3.08 \cdot 10^5 \quad (289)$$

Tablica 12 pokazuje vrijednost maksimalne pozitivne i negativne sile P [kN] kojom cilindar može biti opterećen obzirom na popuštanje svakog od pojedinih slojeva. Vrijednosti u zagradama dobivene su primjenom kriterija maksimalnih napreznja.

Tablica 12: Maksimalna dopuštena sila u [kN]

	$P < 0$	$P > 0$
$+20^\circ$	-198 (-327)	+350 (+392)
-20°	-198 (-327)	+350 (+392)
0°	-156 (-262)	+308 (+315)

Tablica 13 pokazuje vrijednost pojedinih članova u kriteriju popuštanja primjenjenom na sloj $+20^\circ$. Iako Tsai-Wu kriterij izravno ne indicira način popuštanja kompozita, moguće je pretpostaviti da članovi koji imaju najveću vrijednost pokazuju i dominantni način popuštanja.

Tablica 13: Maksimalna dopuštena sila u [kN]

P [kN]	-198	350
σ_1 [MPa]	-758	1340
σ_2 [MPa]	22.2	-39.3
σ_6 [MPa]	29.4	-52.1
$F_1\sigma_1$	0.101	-0.179
$F_2\sigma_2$	0.334	-0.590
$F_{11}\sigma_1^2$	0.308	0.958
$F_{22}\sigma_2^2$	0.049	0.155
$F_{66}\sigma_6^2$	0.087	0.271
$-\sqrt{F_{11}F_{22}}\sigma_1\sigma_2$	0.123	0.385

5 Mehanički utjecaj promjene vlage i temperature

5.1 Toplinska naprezanja i deformacije

Pri promjeni temperature materijala, u njemu se javljaju slobodne toplinske deformacije. Većina materijala vlakana pri zagrijavanju povećavaju volumen, npr. polimeri, aluminijski, bor, kao i većina materijala matrice. Izuzetak su ugljična vlakna koja se pri zagrijavanju skupljaju, te su stoga ugljični kompoziti posebni jer u pravilu imaju negativan koeficijent linearnog toplinskog istezanja α u smjeru vlakna (što u znatnoj mjeri ovisi i o materijalu matrice), dok okomito na smjer vlakana imaju pozitivan α . Koeficijent toplinskog rastezanja linearan je samo za određeni raspon temperatura, dok je generalno nelinearan, što znatno usložnjava proračune. Nadalje, i matrica elastičnosti te fleksibilnosti nisu neovisne o apsolutnoj temperaturi, što je nužno uzeti u obzir ako se razmatra ponašanje kompozita pri većem temperaturnom rasponu (npr. znatno ispod sobne temperature, kao i pri vrijednostima temperature blizu one pri kojoj se kompoziti proizvode). Toplinska naprezanja i deformacije bit će označeni indeksom t . U sustavu glavnih materijalnih osi jednog sloja, samo duljinske toplinske deformacije su različite od nule, dok su kutne jednake nuli. Pri razmatranju kompozitnog paralelepipeda koji je slobodan na svim stranicama, što je nužan uvjet za razmatranje slobodnih toplinskih deformacija, a kojem su stranice u pravcu glavnih materijalnih osi označene a_1 , a_2 te a_3 , slobodne toplinske deformacije su definirane kao

$$\varepsilon_i^t = \frac{\delta_i}{a_i}, \quad i = 1, 3 \quad (290)$$

pri čemu su δ_i produljenja (skraćivanja) paralelepipeda u pravcu materijalne osi i definirana izrazima

$$\delta_i = \alpha_i a_i \Delta T, \quad i = 1, 3 \quad (291)$$

gdje je α_i koeficijent linearnog toplinskog istezanja u pravcu osi i , a ΔT razlika temperature u odnosu na referentnu temperaturu. Ovdje je izrazito važan problem proizvodnje kompozita u autoklavu, gdje se pri hlađenju kompozita, javljaju znatne toplinske deformacije i naprezanja. Stoga je pri proizvodnji ugljičnih kompozita, ΔT negativan i obično iznosi oko -150°C . Pri daljnjem razmatranju nužno je razlikovati ukupne deformacije, toplinske deformacije i mehaničke deformacije, kao i odgovarajuća naprezanja. Ukupne deformacije su mjera promjene dimenzija tijela te se stoga mehaničke deformacije mogu izraziti kao razlika ukupnih i slobodnih toplinskih deformacija

$$\varepsilon^m = \varepsilon - \varepsilon^t \quad (292)$$

Konstitutivna jednadžba, uzimajući u obzir navedeno, glasi

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^t \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (293)$$

odnosno izraženo preko matrice elastičnosti \mathbf{C}

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^t \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (294)$$

pri čemu se vektor mehaničkih deformacija ε^m zapisuje

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^m \\ \varepsilon_2^m \\ \varepsilon_3^m \\ \gamma_{23}^m \\ \gamma_{13}^m \\ \gamma_{12}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^t \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (295)$$

Iz izraza (294) vidljivo je da za su pri određivanju naprezanja bitne mehaničke deformacije ε^m , dok se za određivanje promjene dimenzija čitavog tijela (uzorka) u obzir uzimaju ukupne deformacije ε . Moguće je razlikovati dva slučaja: potpuno slobodno tijelo kod kojeg su ukupna naprezanja i mehaničke deformacije jednaki nuli, te se konstitutivna jednadžba zapisuje

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^t \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (296)$$

odnosno

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^t = \alpha_i \Delta T \quad i = 1, 3 \quad (297)$$

Drugi slučaj je tijelo kojem su potpuno onemogućene deformacije

$$\varepsilon_i = \gamma_{ij} = 0 \quad i = 1, 3 \quad (298)$$

te vrijedi

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\varepsilon_1^t \\ -\varepsilon_2^t \\ -\varepsilon_3^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (299)$$

te su mehaničke deformacije izravno izražene preko toplinskih

$$\varepsilon_i^m = -\alpha_i \Delta T; \quad \gamma_{ij}^m = 0 \quad i = 1, 3 \quad (300)$$

5.2 Naprezanja i deformacije uslijed promjene sadržaja vlage

Problem vlage naročito je izražen kod polimernih materijala, npr. epoksidna matrica je higroskopna i ako nije zaštićena od utjecaja okoline, može apsorbirati znatnu količinu vlage (čak i više od 5 % referentne mase kompozita). Budući da ne postoji kompozit koji je potpuno bez vlage, referentna je masa proizvoljno određena u određenom trenutku eksploatacije. Analogno koeficijentu linearnog toplinskog istežanja α_i , ovdje se uvodi linearni koeficijent istežanja uslijed vlage β_i . Slobodne deformacije uslijed vlage ε_i^v se definiraju analogno slobodnim toplinskim deformacijama ε_i^t

$$\varepsilon_i^v = \beta_i \Delta M, \quad i = 1, 3 \quad (301)$$

pri čemu su β_i za $i = 1, 3$ koeficijenti linearnog istežanja uslijed vlage u smjeru glavnih materijalnih osi, a ΔM promjena sadržaja vlage u odnosu na referentnu vrijednost. Vidljivo je da ponovno postoje samo duljinske deformacije uslijed vlage u pravcu glavnih materijalnih osi, dok su vrijednosti kutnih deformacija jednake 0. Slično kao i kod toplinskih naprezanja i deformacija i ovdje se definiraju naprezanja i deformacija koji uključuju i mehaničke, toplinske kao i vrijednosti deformacija uslijed vlage, te konstitutivna jednažba sada ima oblik:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t - \varepsilon_1^v \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t - \varepsilon_2^v \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^t - \varepsilon_3^v \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (302)$$

odnosno izraženo pomoću matrice elastičnosti

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t - \varepsilon_1^v \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t - \varepsilon_2^v \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^t - \varepsilon_3^v \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (303)$$

Sve prije navedeno vezano uz toplinska naprezanja (deformacije) vrijedi i za veličine koje se javljaju zbog utjecaja vlage te se ponovno mogu razmatrati slučajevi potpuno slobodnog ili potpuno ograničenog kompozita, na način kako je to već izvršeno u poglavlju 5.1.

5.3 Utjecaj promjene temperature i sadržaja vlage kod laminata u ravninskom stanju naprezanja

Za ravninsko stanje naprezanja vrijedi da su sve komponente naprezanja koje imaju indeks 3 jednake 0. No, duljinska deformacija u pravcu osi 3, ε_3 nije jednaka 0. Nadalje, vrijedi važna pretpostavka da nema gradijenta temperature u pravcu osi z (drugim riječima promjena temperature u pravcu osi z je ista za sve slojeve). Tada se pomoću

reducirane matrice krutosti \mathbf{Q} i fleksibilnosti \mathbf{S} , konstitutivne jednačbe zapisuju.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t - \varepsilon_1^v \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t - \varepsilon_2^v \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ & S_{22} & 0 \\ sim. & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (304)$$

odnosno

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ sim. & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t - \varepsilon_1^v \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t - \varepsilon_2^v \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (305)$$

Ponovno su mehaničke deformacije definirane kao razlika ukupnih i slobodnih toplinskih i slobodnih deformacija uslijed vlage

$$\varepsilon^m = \varepsilon - \varepsilon^t - \varepsilon^v \quad (306)$$

Sve dosada napisano odnosilo se na definiranje naprežanja i deformacija u sustavu glavnih materijalnih osi. No, kad se razmatra čitav kompozit, koji se sastoji od, često, velikog broja slojeva nužno je sve komponente tenzora naprežanja i deformacija prikazati u jednom, referentnom koordinatnom sustavu, (x, y, z) da bi se integriranjem moglo odrediti vektore sila i momenata, kako je to prikazano u poglavlju 4.4. Stoga je potrebno provesti odgovarajuće tenzorske transformacije, a prvi je korak da se komponente α_i i β_i prikažu u koordinatnom sustavu (x, y, z) . U tu se svrhu koriste dobro poznate tenzorske transformacije pri rotaciji tenzora iz koordinatnog sustava glavnih materijalnih osi u globalni (općeniti) sustav. Ako je kut između stare osi 1 i nove osi x jednak θ , vrijedi

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^t &= \cos^2 \theta \varepsilon_1^t + \sin^2 \theta \varepsilon_2^t \\ \varepsilon_y^t &= \sin^2 \theta \varepsilon_1^t + \cos^2 \theta \varepsilon_2^t \\ \varepsilon_z^t &= \varepsilon_3^t \\ \varepsilon_s^t &= \gamma_{xy}^t = 2 \sin \theta \cos \theta (\varepsilon_1^t - \varepsilon_2^t) \end{aligned} \quad (307)$$

što uvrštavanjem izraza za slobodne toplinske deformacije daje

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^t &= \cos^2 \theta \alpha_1 \Delta T + \sin^2 \theta \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_y^t &= \sin^2 \theta \alpha_1 \Delta T + \cos^2 \theta \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_z^t &= \alpha_3 \Delta T \\ \gamma_{xy}^t &= 2 \sin \theta \cos \theta (\alpha_1 \Delta T - \alpha_2 \Delta T) \end{aligned} \quad (308)$$

iz čega se lako izvodi veza linearnih koeficijenata temperaturnog istezanja

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta \\ \alpha_y &= \alpha_1 \sin^2 \theta + \alpha_2 \cos^2 \theta \\ \alpha_z &= \alpha_3 \\ \alpha_{xy} &= 2 \sin \theta \cos \theta (\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \quad (309)$$

Provođenjem istog ovog postupka, ali za slobodne deformacije uslijed promjene sadržaja vlage, dobivaju se relacije

$$\begin{aligned}\beta_x &= \beta_1 \cos^2 \theta + \beta_2 \sin^2 \theta \\ \beta_y &= \beta_1 \sin^2 \theta + \beta_2 \cos^2 \theta \\ \beta_z &= \beta_3 \\ \beta_{xy} &= 2 \sin \theta \cos \theta (\beta_1 - \beta_2)\end{aligned}\quad (310)$$

Iz navedenih izraza vidljivo je da iako u glavnom materijalnom sustavu nema kutnih deformacija izazvanih promjenom temperature ili vlage, u globalnom (proizvoljnom) koordinatnom sustavu postoje kutne deformacije $\gamma_{xy}^t \neq 0$ kao i $\gamma_{xy}^v \neq 0$ budući da su α_{xy} te $\beta_{xy} \neq 0$. Sljedeći važan korak je određivanje veze između naprezanja i deformacija u globalnom koordinatnom sustavu (x, y, z) . Polazeći od izraza (304)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^t - \varepsilon_1^v \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^t - \varepsilon_2^v \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ & S_{22} & 0 \\ sim. & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}\quad (311)$$

te uz zapis izraza (307) u matricnoj formi (uz $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^t \\ \varepsilon_y^t \\ \gamma_{xy}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -cs \\ s^2 & c^2 & cs \\ 2cs & -2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2^t \\ 0 \end{Bmatrix}\quad (312)$$

vidljivo je da je matrica transformacije ponovno $\mathbf{T}_\varepsilon^{-1}$ kako je definirano u poglavlju 2.1 čime se prijašnji izraz može zapisati.

$$\varepsilon_{|x|}^t = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \varepsilon_{|i|}^t\quad (313)$$

Množenjem čitave jednadžbe matricom \mathbf{T}_ε s lijeve strane, dobiven je vektorski izraz

$$\varepsilon_{|i|}^t = \mathbf{T}_\varepsilon \varepsilon_{|x|}^t\quad (314)$$

pri čemu je $\varepsilon_{|i|}^t$ vektor toplinskih deformacija u sustavu glavnih materijalnih osi, a $\varepsilon_{|x|}^t$ vektor toplinskih deformacija u globalnom sustavu. Na isti se način može pokazati veza deformacija izazvanih promjenom sadržaja vlage gdje se vektori odnose na iste koordinatne sustave kao i kod toplinskih deformacija

$$\varepsilon_{|i|}^v = \mathbf{T}_\varepsilon \varepsilon_{|x|}^v\quad (315)$$

Znajući da je prema izrazu (76)

$$\sigma_{|i|} = \mathbf{T}_\sigma \sigma_{|x|}\quad (316)$$

te uzimajući u obzir prije napisane izraze, vrijedi

$$\mathbf{T}_\varepsilon (\varepsilon_{|x|} - \varepsilon_{|x|}^t - \varepsilon_{|x|}^v) = \mathbf{S} \mathbf{T}_\sigma \sigma_{|x|}\quad (317)$$

te nakon množenja s $\mathbf{T}_\varepsilon^{-1}$ s lijeve strane vrijedi

$$\varepsilon_{|x|} - \varepsilon_{|x|}^t - \varepsilon_{|x|}^v = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}_\sigma \sigma_{|x|}\quad (318)$$

Uz

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}_\sigma \quad (319)$$

izraz (318) zapisan je

$$\varepsilon_{|x|} - \varepsilon_{|x|}^t - \varepsilon_{|x|}^v = \bar{\mathbf{S}} \sigma_{|x|} \quad (320)$$

odnosno

$$\varepsilon_{|x|} - \varepsilon_{|x|}^t - \varepsilon_{|x|}^v = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ sim. & & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \sigma_{|x|} \quad (321)$$

Ako se izraz (320) pomnoži s lijeve strane matricom $\bar{\mathbf{S}}^{-1} = \bar{\mathbf{Q}}$ vrijedi zapis

$$\sigma_{|x|} = \bar{\mathbf{Q}}(\varepsilon_{|x|} - \varepsilon_{|x|}^t - \varepsilon_{|x|}^v) \quad (322)$$

odnosno

$$\sigma_{|x|} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sim. & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} (\varepsilon_{|x|} - \varepsilon_{|x|}^t - \varepsilon_{|x|}^v) \quad (323)$$

Iz navedenih se izraza jednostavno dobivaju vrijednosti naprezanja za kompozit kojem su spriječeni svi pomaci rubova (uklješteni) za koji vrijedi $\varepsilon_{|x|} = 0$, deformacije za slučaj potpuno slobodnih rubova kod kojeg je $\sigma_{|x|} = 0$ ili slučaj bez promjene temperature odnosno sadržaja vlage ($\varepsilon_{|x|}^t$ odnosno $\varepsilon_{|x|}^v = 0$). Ovo su najjednostavniji slučajevi, no mogu se analizirati i svi ostali slučajevi kod kojih bilo koja komponenta tenzora naprezanja ili deformacija može imati zadanu vrijednost. Kako je prije definirano, mada se uobičajeno zanemaruje kad se radi o relativno tankim kompozitima, komponenta tenzora deformacija $\varepsilon_z = \varepsilon_3$ u općenitom slučaju $\neq 0$ te se direktno zapisuje korištenjem izraza (302) kao

$$\varepsilon_z = \alpha_3 \Delta T + \beta_3 \Delta M + S_{13} \sigma_1 + S_{23} \sigma_2 \quad (324)$$

odnosno korištenjem transformacija vrijednosti u globalni koordinatni sustav (uz $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$)

$$\varepsilon_z = \alpha_3 \Delta T + \beta_3 \Delta M + (S_{13} c^2 + S_{23} s^2) \sigma_x + (S_{13} s^2 + S_{23} c^2) \sigma_y + 2(S_{13} - S_{23}) c s \tau_{xy} \quad (325)$$

Nakon definiranja ovih izraza, lako je postaviti izraze kojima su određena naprezanja, sile i momenti kod svih slojeva u kompozitu.

5.4 Sile i momenti uslijed promjene temperature i sadržaja vlage

Izrazi definirani u prijašnjim poglavljima koriste se i za definiranje sila i momenata. Ove veličine mogu imati znatno drugačije vrijednosti u odnosu na vrijednosti bez promjene temperature i vlage. Generalni zaključci: ako promjena temperature nije ovisna o z koordinati, tada kod simetričnih materijala nema pojave dodatnih momenata savijanja i uvijanja, dok postoji promjena u iznosu sila. Izrazi (187) kojima su definirane sile i momenti vrijede bez obzira na koji su način definirana naprezanja (odnosno što ta

naprezanja uključuju) te se vrijednosti sila i momenata mogu zapisati

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x + N_x^t + N_x^v \\ N_y + N_y^t + N_y^v \\ N_{xy} + N_{xy}^t + N_{xy}^v \\ M_x + M_x^t + M_x^v \\ M_y + M_y^t + M_y^v \\ M_{xy} + M_{xy}^t + M_{xy}^v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & sim. & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} \quad (326)$$

odnosno matrično zapisano

$$\left\{ \begin{array}{l} N + N^t + N^v \\ M + M^t + M^v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{array} \right\} \quad (327)$$

ili u inverznom obliku

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{D}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} N + N^t + N^v \\ M + M^t + M^v \end{array} \right\} \quad (328)$$

Tada se sila N_x u pravcu osi x može zapisati

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\varepsilon_s^0 + B_{11}\kappa_x + B_{12}\kappa_y + B_{16}\kappa_{xy} - N_x^t - N_x^v \quad (329)$$

U ovom su izrazu $N_x^{t,v}$ resultantne sile u pravcu osi x uslijed promjene temperature odnosno sadržaja vlage. Analogno se analizom izraza (326) mogu definirati i preostale dvije komponente sila, kao i momenti, npr.

$$M_x = B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + B_{16}\varepsilon_s^0 + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y + D_{16}\kappa_{xy} - M_x^t - M_x^v \quad (330)$$

pri čemu su $M_x^{t,v}$ odgovarajući momenti uslijed promjene temperature odnosno sadržaja vlage. Sukladno izrazima definiranim u teoriji laminata, izvode se pojedine komponente toplinskih sila i momenata, npr.

$$N_x^t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\bar{Q}_{11}\alpha_x + \bar{Q}_{12}\alpha_y + \bar{Q}_{16}\alpha_{xy})\Delta T dz \quad (331)$$

$$M_x^t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\bar{Q}_{11}\alpha_x + \bar{Q}_{12}\alpha_y + \bar{Q}_{16}\alpha_{xy})\Delta T z dz \quad (332)$$

te sile i momenti uslijed promjene vlage

$$N_x^v = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\bar{Q}_{11}\beta_x + \bar{Q}_{12}\beta_y + \bar{Q}_{16}\beta_{xy})\Delta M dz \quad (333)$$

$$M_x^v = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\bar{Q}_{11}\beta_x + \bar{Q}_{12}\beta_y + \bar{Q}_{16}\beta_{xy})\Delta M z dz \quad (334)$$

Na isti se način mogu definirati i sve ostale vrijednosti sila i momenata. Sukladno izrazima kojima su u prijašnjim poglavljima definirane sile i momenti, integracija po z

koordinati se svodi na sumaciju po slojevima, budući da se razmatra generalni slučaj kada svaki sloj ima drugačija mehanička svojstva, npr.

$$N_x^t = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11k} \alpha_{xk} + \bar{Q}_{12k} \alpha_{yk} + \bar{Q}_{16k} \alpha_{xyk}) (h_k - h_{k-1}) \Delta T \quad (335)$$

$$M_x^t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11k} \alpha_{xk} + \bar{Q}_{12k} \alpha_{yk} + \bar{Q}_{16k} \alpha_{xyk}) (h_k^2 - h_{k-1}^2) \Delta T \quad (336)$$

$$N_x^v = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11k} \beta_{xk} + \bar{Q}_{12k} \beta_{yk} + \bar{Q}_{16k} \beta_{xyk}) (h_k - h_{k-1}) \Delta M \quad (337)$$

$$M_x^v = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11k} \beta_{xk} + \bar{Q}_{12k} \beta_{yk} + \bar{Q}_{16k} \beta_{xyk}) (h_k^2 - h_{k-1}^2) \Delta M \quad (338)$$

Izrazi (335) do (338) se mogu se sažeto zapisati u matricnoj formi

$$N^t = \Delta T \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \alpha_k (h_k - h_{k-1}) \quad (339)$$

$$M^t = \frac{1}{2} \Delta T \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \alpha_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (340)$$

$$N^v = \Delta M \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \beta_k (h_k - h_{k-1}) \quad (341)$$

$$M^v = \frac{1}{2} \Delta M \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k \beta_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (342)$$

gdje su N^t i M^t vektor toplinskih sila odnosno momenata, a N^v i M^v vektor sila i momenata uslijed promjene sadržaja vlage. α i β su vektori koeficijenata linearnog istezanja uslijed promjene temperature odnosno sadržaja vlage, indeks k odnosi se na k -ti sloj dok je n ukupan broj slojeva. Kao i u slučaju pojave mehaničkih sila i momenata, pojava sila i momenata uslijed topline i vlage bitno ovise o rasporedu slojeva u laminatu.

1. Simetrični laminati:

Sve komponente vektora momenata su jednake 0 dok su sve veličine sila različite od nule.

2. Uravnoteženi (balansirani) laminati (oni kod kojih za svaki sloj s pravcem vlakana θ postoji sloj jednake debljine i od istog materijala s pravcem vlakana $-\theta$):

Sile $N_{xy}^t = N_{xy}^v = 0$, sve su ostale sile i momenti $\neq 0$. N_{xy} su jednaki nuli zbog toga što su građeni od \bar{Q}_{16} i \bar{Q}_{26} koji se u ovom slučaju poništavaju za isti pozitivni i negativni kut vlakna.

3. Simetrični uravnoteženi laminati:

Mehanički odziv je kombinacija slučaja 1. i 2. te će biti jednaki nuli sve komponente vektora momenata te $N_{xy}^t = N_{xy}^v = 0$

4. **Poprečni (*cross-ply*) laminat** koji se sastoji samo od slojeva s vlaknima pod kutem 0° ili 90° :

Sile i momenti $N_{xy}^{t,v} = M_{xy}^{t,v} = 0$, dok su sve ostale komponente $\neq 0$.

5. **Simetrični poprečni laminat:**

Kombinacija slučaja 1. i 4. - jednake su nuli sve komponente momenata kao i $N_{xy}^{t,v}$

6. **Izotropni sloj** kao posebni slučaj jednog ortotropnog sloja:

$$N_x^t = N_y^t = \frac{Eh\alpha}{1-\nu^2} \quad (343)$$

te

$$N_x^v = N_y^v = \frac{Eh\beta}{1-\nu^2} \quad (344)$$

gdje je E modul elastičnosti, h debljina sloja, a ν Poissonov koeficijent. Sve su ostale komponente sila i momenata jednake 0.

Literatura

- [1] M.C.Y. Niu: *Airframe Structural Design*, Connilit Press, 1988
- [2] A.Baker, S.Dutton, D.Kelly: *Composite Materials for Aircraft Structures*, AIAA Educational Series, 2004
- [3] D.H.Middleton: *Composite Materials in Aircraft Structures*, Longman Scientific & Technical, 1990
- [4] M.W.Hyer: *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*, McGraw-Hill, 1998
- [5] K.K. Chawla: *Composite Materials - Science and Engineering*, Springer-Verlag, 1987
- [6] R.M.Jones: *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, 1975
- [7] S.W.Tsai: *Theory of Composites Design*, Think Composites, 1992
- [8] W.M.Lai, D.Rubin, E.Krempel: *Introduction to Continuum Mechanics*, Butterworth-Heinmann, 1999